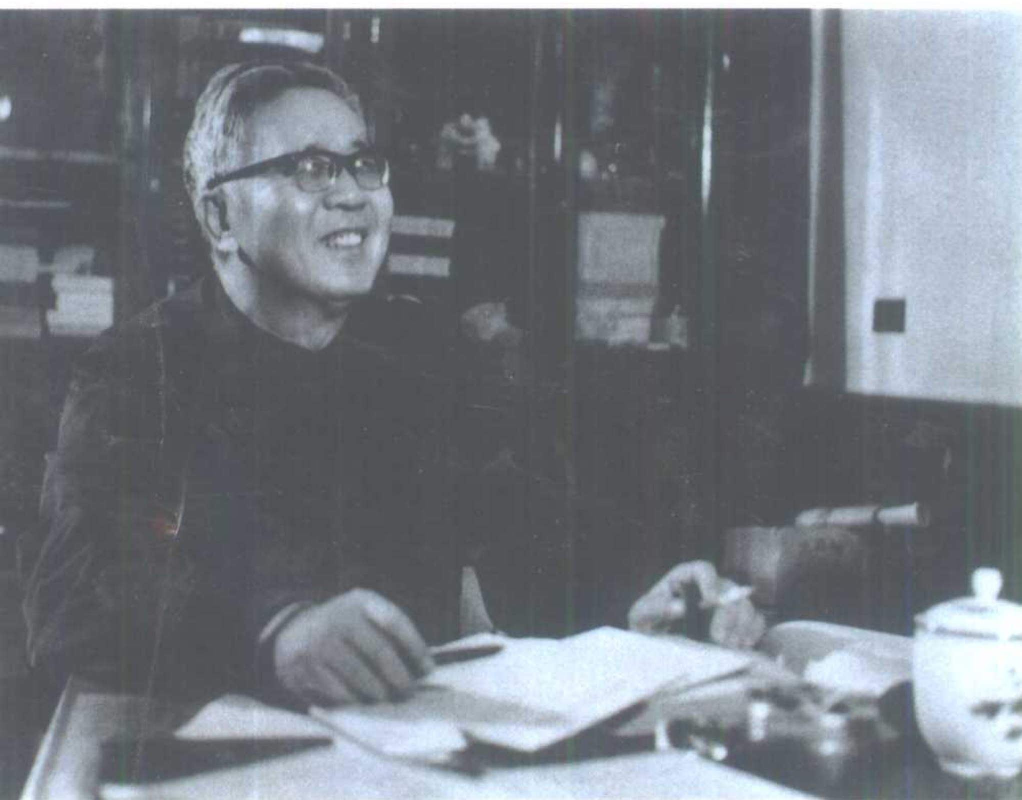
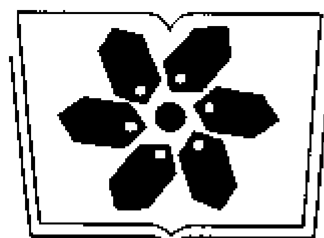


华罗庚的数学生涯

华罗庚是世界著名的数学家，他的成就遍及数学很多重要领域，他又是中国应用数学的先行者和开拓者，他的学术成就、思想与方法是中华民族文化的一部分，不仅产生了世界性的影响，而且将影响未来。本书从数学学术研究角度研究了华罗庚一生的数学工作、道路探索及其思想与方法，……

王 元 杨德庄 著
（华罗庚应用数学与信息科学研究中心）

科学出版社



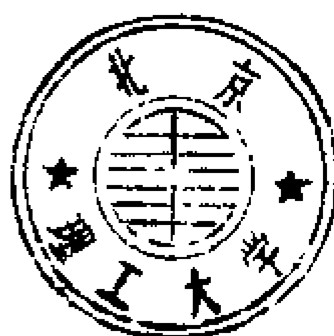
中国科学院科学出版基金资助出版

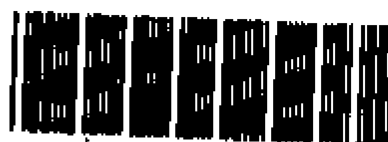
华罗庚的数学生涯

王　元　杨德庄 著

(华罗庚应用数学与信息科学研究中心)







科 学 出 版 社

2000

内 容 简 介

本书介绍世界著名数学家华罗庚的数学成就．华罗庚不仅在遍及数学诸多领域有许多优秀的研究成果，而且他的特殊的学术思想和方法论已作为中华民族文化的一部分而载入史册．

本书分一、二两篇，第一篇介绍华罗庚在纯粹数学方面的成就，包括华罗庚在数论、代数、几何和复分析方面的工作，还附以国外的数学家的评论．第二篇介绍华罗庚在应用数学和数学普及方面的贡献，包括近似分析、统计中的数论方法、统筹方法、优选法和经济优化平衡的理论及华罗庚探索中国应用数学的道路、思想与方法论方面的思考等．书后有15个附录，其中有些资料具有珍贵的史料价值．

本书内容丰富、深入浅出，对于想了解华罗庚的成就和学术思想的读者十分有益．

图书在版编目（CIP）数据

华罗庚的数学生涯/王元，杨德庄著．-北京：科学出版社，2000

ISBN 7-03-008298-2

Ⅰ．华… Ⅱ．①王… ②杨… Ⅲ．①华罗庚-数学理论-科技成果②华罗庚-数学理论-学术思想 Ⅳ．01-092.7

中国版本图书馆CIP数据核字（2000）第02213号

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码：100717

□□印刷厂 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2000年7月第 一 版 开本：850×1168 1/32

2000年7月第一次印刷 印张：12 5/8 插页：4

印数：1—2 800 字数：333 000

定价：35.00元

（如有印装质量问题，我社负责调换（新欣））

前 言

近现代中国数学史的研究，可以说是一个缺门．目前连起码的统计资料还没有．例如全国数学家每年在国内外著名杂志上发表的论文有多少？全国达到一定水平的数学家总数有多少？更不必说作进一步的分析研究了．

近年来，中国科学院与中国科学技术协会组织编写了中国科学家与工程师传略，即人物条目，这项工作无疑是很重要的．但每一条目仅有几千字，所以本质上是字典型的．因此我们还需要有一些宏观论述中国近现代数学史的著作．要做这样的事情，其难度与深度当然就要大多了．

数学史决不仅仅是一些材料的堆积，而是一项研究工作．对于数学家及他们的工作，需作出分析与评价，从中引出有益的经验教训，使它成为一面镜子，为今后中国数学的发展借鉴．

中国近现代数学的研究与教学是 20 世纪 20 年代开始起步的．由一些早期留学欧美与日本的留学生将近代数学知识引进中国．华罗庚是 30 年代初进入清华大学之后开始走上数学研究之路的．在前辈的指导与同辈的切磋下，他与陈省身、周炜良、许宝騄等一起进入了世界著名数学家的行列．

华罗庚是中国解析数论、多复变函数论、典型群与矩阵几何等领域研究的创始人．他一生的大部分时间都是在中国度过的．自 1949 年后的 30 年，中国基本上处于封闭状态．华罗庚对中国数学的作用就更显得重要了．除研究工作外，他为中国培养了大批优秀的学生，例如陈景润、万哲先、陆启铿和龚昇等，受过他的影响的人就更多了．华罗庚的最后 20 年，主要从事在中国的工业部门普及数学方法．根据中国国情提出的“统筹法”与“优选法”的普及，取得良好的社会与经济效益．陈德泉和计雷是他

在普及工作中的助手.

华罗庚数学思想研究无疑是中国近现代数学史研究的一个重要课题，但目前在国内几乎还没有什么研究，直至最近才零星见到几篇文章，但国外对华罗庚的研究评述就要丰富多了.

本书分两部分来论述华罗庚的数学工作. 第一部分为纯粹数学. 我们并不全面介绍他的工作，只介绍一些最主要而又能用较初等的数学加以解释的部分，然后附以外国对他的主要评论. 第二部分为应用数学与数学普及. 除第六章因基本上与纯粹数学相近，所以写法上与第一部分一样外，其他部分的写法上则有较大差异. 众所周知，怎样看待华罗庚的这部分工作是有争议的. 由于他过早过世，一些想法也来不及深入与发展. 其中第八章为他经济数学的系统发表. 第七章为数学普及的概述. 第九章则为应用数学提高型工作的一些构想及他学生作的一些尝试. 这一部分更有待于进一步的研究. 此外书中还包括了一些附录，一些文章也涉及到他数学以外的方面，对于更全面了解华罗庚的一生是有参考价值的.

我们希望这本书成为一块引玉之砖，引起更多人关注中国近现代数学史的研究. 有争议是一件好事，可以活跃思想，辩明是非，更利于前进. 最后，对于书中不妥之处，还望读者不吝指教.

华罗庚应用数学与信息科学研究中心学术委员会主任

王　元

华罗庚应用数学与信息科学研究中心执行主任、学术委员会副主任

杨德庄

1999 年 5 月



华罗庚与王元

油画作者／舒均欢教授



青年时代的华罗庚



华罗庚工作中的欢乐

华罗庚和他的学生杨德庄





华罗庚与夫人吴筱元（右）
陈省身与夫人郑士宁（左）

华罗庚与著名数学家 E. Bombieri 在宴会上





华罗庚与著名数学家 A. Selberg（左一）
H. E. Richert（右二）

大师相聚　（从左至右→　华罗庚 老 舍 梁思成 梅兰芳）





华罗庚与段学复、苏步青、何 鲁交谈（从左至右）

华罗庚（右二）、冯康（左二）与苏联专家





华罗庚与陈景润在一起

华罗庚（左二）、张文裕（左一）在英国剑桥





（从右至左）

前排：越民义 陈景润 华罗庚 陆启铿 潘承洞

后排：王元 计雷 龚升 陆洪文 吴方 陈德泉 万哲先 李之杰



华罗庚和他在中国科大培养的应用数学学生在一起

目　录

第二篇 应用数学与数学普及

第一篇　纯粹数学

第一章　导　　言

§1.1　由自学青年到数论学家

华罗庚是一个自学成才的数学家. 他在初中毕业后仅念了一年半职业高中，即在家自学数学. 他在家乡江苏省金坛县，所能见到的数学书籍只有一本《大代数》，一本《解析几何》及一本约50页的《微积分》. 此外还有两本与数学有点关系的杂志《科学》与《学艺》. 华罗庚在金坛时期边自学，边写过几篇文章，都属于初等数学范围.

1930年，华罗庚发表了论文"苏家驹之代数的五次方程式不能成立之理由"，受到清华大学算学系主任熊庆来的赏识. 1931年，他被调到清华大学算学系任助理员. 这样，他可以边工作，边学习. 那时中国近代数学的研究与教学刚起步不久. 清华大学是国内最高学府. 算学系有熊庆来研究单复变函数论，杨武之研究数论，孙光远研究微分几何学. 此外，南方的浙江大学有陈建功与苏步青. 他们分别研究傅级数与微分几何学. 北方南开大学的姜立夫也是研究几何学的.

作为自学出身的华罗庚，在自学中更多地做了一些较难的习题. 由于他对解题技巧的擅长与喜爱，所以他选择数论作为最初的研究领域是顺理成章的事. 在清华大学期间，华罗庚更多地得到了杨武之的指导. 杨武之在20世纪20年代留学美国期间，受到L. E. Dickson的指导研究数论. 他曾证明了每个正整数均为九个某种三次多项式之和，这是华林(G. Waring)问题的变体，

所谓华林问题是将正整数表为正整数的等方幂之和.

华林问题是首先引起华罗庚兴趣的数学问题. 在清华大学期间, 华罗庚能够读到 E. Landau 的一些优秀数论著作, 特别是他的三卷"Vorlesungen über Zahlentheorie". 这使他对技巧性很强的解析数论备感兴趣. 他学习了 ζ 函数与素数分布理论, G. H. Hardy, J. E. Littlewood 与 S. Ramanujan 的圆法与堆垒数论. 同时他也学习了 D. Hilbert 的书"Bericht über die Theorie der algebraischen Zahlenkörper", 所以他对代数数论与抽象代数也有一些了解与掌握. 从 1935 年开始, 华罗庚学习了 I. M. Vinogradov 估计 H. Weyl 和的方法及其在 Waring 问题上的重要应用. 1935—1936 年间, 法国著名数学家 J. Hadamard 与美国著名数学家 N. Wiener 到清华大学讲学. 华罗庚得到他们的指导并听了他们的演讲, 受益良多. 他从 Wiener 那里学到了傅氏分析的知识与技巧. Hadamard 向华罗庚强调了 Vinogradov 关于 Waring 问题研究的重要性, 他还介绍华罗庚与 Vinogradov 通信, 这样, 华罗庚就能够直接得到 Vinogradov 最新研究成果的论文抽印本. 但在清华大学期间, 华罗庚的数论工作仍属于初等方法范围, 工作也比较零散.

1936 年, 华罗庚去英国剑桥大学进修. 由于资助金额有限, 他不是正式的研究生, 而是一个访问学者. 虽然那时 Hardy 已经年老, 但在剑桥大学及其附近有一批年富力强的年轻数论学家, 如 H. Davenport, T. Estermann, H. Heilbronn 与 E. C. Titchmarsh 等. 华罗庚很得益于与他们之间的相互切磋. 这段时期, 华罗庚的工作效率非常高, 进步极大. 工作水平有了飞跃. 特别是他解决了完整三角和估计这一历史名题. 华罗庚关于三角和的积分平均公式, 导致了对 Waring 问题的重要改进. 他还在 E. Prouchet-G. Tarry 问题上对 E. M. Wright 的结果作了重要改进.

1938 年, 华罗庚由英国回国, 任位于云南省昆明市的西南联合大学数学系教授. 这期间, 他的主要数论工作为结合他自己

的完整三角和估计与三角和的积分平均公式及 Vinogradov 的 Weyl 和估计与 Vinogradov 的以素数为变数的三角和估计在一起，系统地研究了堆垒素数论这一课题．由于有了完整三角和估计，所以他可以将 Waring 问题推广为处理不定方程

$$N = f(x_1) + \cdots + f(x_s)$$

的求解问题，其中$f(x)$为一个 k 次首项系数为正的整值多项式．当 $f(x) = x^k$ 即得 Waring 问题．有了他的三角和积分平均公式，当 k 较小时，华罗庚得到了 Waring 问题当时的最好结果，再利用 Vinogradov 关于素数变数三角和的估计，还可以限制不定方程中的变数 x_1，⋯，x_s 均取素数．华罗庚将他在这方面系统的研究写成了专著《堆垒素数论》．书稿完成于 1940 年左右．他将书稿投寄苏联科学院出版．由于第二次世界大战爆发，该书推延至 1947 年，才由苏联科学院 V. A. Steklov 数学研究所以其第 22 号专著形式出版．1957 年，华罗庚又将某种特殊的完整三角和作了改进，并使 Waring 问题优弧的估计达到了最佳结果．以上是华罗庚最有影响的数论工作．

除此而外，对其他一些著名数论问题，华罗庚也作出了改进，如圆内整点问题及最小原根估计等．1959 年，华罗庚撰写了《指数和的估计及其应用》作为《德国数学百科全书》中的一册．该书对经典解析数论的历史、方法与结果作了全面阐述．另外，作为一本数论的入门书，华罗庚撰写了《数论导引》，于 1957 年出版．由这本书可以看出华罗庚在数论方面的广阔的知识面与深刻的理解．

§1.2 转变

1940 年前后，华罗庚预测到三角和估计与堆垒数论不会有很大进展的前景了．他将工作重点转到自守函数论、矩阵几何学、多复变函数论与典型群论方面的研究．

在矩阵几何学中，某种类型的矩阵被看作某种矩阵空间的

点．在多复变函数论中，矩阵则作为变元．因而可以将这几门学科放在一起研究，形成自己的特色．即尽量用矩阵直接的计算来代替较抽象的推导．华罗庚在研究这些问题之前，可能已经接触过 C．L．Siegel 关于二次型理论的一些文章．但是他与 Siegel 以后的工作则是完全独立进行的，所以不可避免地会有部分重复．他关于自守函数的第一篇文章，就将重复的部分加以删减而重写．当然他们的重点也不一样．虽然当时的教育部已经提供了他去美国访问的经费，但为了能在中国独立地完成这部分工作，华罗庚将经费退还给教育部并推迟了去普林斯顿高等研究院的访问时间（见附录）．

1946 年，华罗庚赴美国访问，先在普林斯顿高等研究院做研究．1948 年转入依利诺斯大学执教．除继续他在矩阵方法方面的工作外，也对 Vinogradov 的中值公式作了重要的简化、改进与应用．旅美期间，华罗庚关于体论的几个漂亮结果也很引人注目．他还与 H．Vandiver 合作研究了有限域上的不定方程．

1950 年，华罗庚率全家回国．他的主要工作为定出四类典型域的完整正交系，从而得到了四类典型域上的 A．L．Cauchy 核等．他关于矩阵几何与典型群的研究也有较大进展．他将上述工作写成两本专著:《多复变函数论中的典型域的调和分析》(1957)与《典型群》(与万哲先合作,1963)．

华罗庚很喜欢与同辈数学家讨论数学并重视培养年轻数学家．早在西南联合大学期间，他就组织了代数讨论班，参加他的讨论班而受益者有段学复、樊𰋀与徐贤修等，也系统讲授过堆垒数论，闵嗣鹤与钟开莱听过课．1950 年以后，他更加重视培养年轻数学家了，跟着他工作的有越民义、万哲先、陆启铿、龚昇、许孔时、严士健、王元、陈景润、吴方与魏道政等，受其影响的有冯康、丁石孙、曾肯成、丁夏畦、王光寅、张里千、邱佩璋、潘承洞、石钟慈与林群等．

华罗庚还研究了广义函数论与微分方程式论．有些工作刚开了头并未深入下去．他将这部分工作写成了两本书：《从单位圆

谈起》(1981)与《二阶两个自变数两个未知数的常系数偏微分方程组》(与林伟,吴兹潜合作,1979).

华罗庚的工作特点是他善于用直接与初等的方法来解决困难的数学问题. 最早指出他的这一特点的是冯康，最早见诸文献的是 S. Salaff 的文章（见附录).

从 1958 年起，华罗庚开始用一部分时间从事应用数学与数学普及工作. 至 1965 年，华罗庚将全部精力放在数学方法在我国工农业生产部门的普及工作. 至此，他的纯粹数学研究即告一段落.

§1.3 华罗庚论文选集

由 H. Halberstam 主编，1982 年斯普林格(Springer)出版社出版了《华罗庚论文选集》. 这本书基本上记录了华罗庚一生的学术轨迹. 书中包括了编者写的序与华罗庚的简历. 全书共收集了华罗庚的 48 篇学术论文，分为 4 个部分：数论、代数与几何、函数论与其他. 前三部分的前面分别登载了王元、万哲先、龚昇及陆启铿为该部分撰写的导引.

如编者所说，最早分别于 1947 年与 1958 年出版的他的经典著作《堆垒素数论》与《多复变函数论中的典型域的调和分析》，其英文版都是美国数学会出版的，现在仍继续保持着印刷与销售. 另外还有两本性质完全不同的书：一本是与王元合著的《数论在近似分析中的应用》及另一本厚书《数论导引》已被译成了英文，皆将于近期由斯普林格出版社出版. 因此凡上述前三本书中的内容，在此文集中，就选取的比较少了. 例如在数论部分，与《堆垒素数论》有关者只收集了他关于完整三角和、华氏不等式及关于 Vinogradov 中值公式的改进的几篇文章. 在函数论部分只收集了作者于 40 年代发表的关于自守函数论的三篇文章，未收集他关于典型域上调和分析的文章. 在其他部分，只收集了他跟王元合作的关于近似分析中的数论方法的一篇文章. 因此由

这本论文集，再加上述四本书才可以基本上了解华罗庚关于数学理论工作的全貌.

书中还列举了华罗庚数学工作小分队曾经工作过的方面，其中列举了他们在纺织工业、电子工业、冶金工业、采煤、电力、通讯与交通、建筑材料、食品、食油与食品加工业、产品设计、化学工业、石油工业与能源工业等方面工作过的课题题目.

书末附有华罗庚的著作目录.

§1.4 评论之一（梯莱斯）

这是一本唯一的有传奇一生的数学家令人神往的论文选集.从文集开端关于作者生平简介中得知："1910 年 11 月，华罗庚出生于中国的一个贫苦家庭. 他只在学校里念了九年书，直到 1979 年才获得第一个大学学位*. 这位没有大学文凭的人的工作范围之广阔实在令人吃惊. 诚如龚昇与陆启铿在评论华罗庚的函数论工作时所说，华罗庚的"方法以其直接与具体为特色（第 634 页）". 有许多理由认为这本书对全世界数学家来说，都是一个宝贵的财富. 例如，它证明了一个数学家可以同时研究纯粹数学与应用数学，甚至同一个人既可以研究分析又可以研究代数.

在此我们将首先很简要地介绍一下论文集的内容. 读者将看到在这本书的每一部分之前都有一个相当详细的导引.

数论部分包括下面问题的论文：指数和的估计，Waring 问题，C. Goldbach 问题，圆问题与二次非剩余分布等. 作为一个例子，我们来看看这一部分，他的最后一篇文章："关于 Tarry 问题的解数". 这篇文章的主要结果涉及到 $r(t,P)$，它表示丢番图方程组 $x_1^i+\cdots+x_t^i=y_1^i+\cdots+y_t^i, 1\leqslant i\leqslant k$ 在限制 $1\leqslant x_i, y_i\leqslant P, k\geqslant 2$ 之下的解数. 华罗庚证明了当 $t>t_0$ 时，$\lim\limits_{P\to\infty}P^{a}r(t,P)$

---

* 指华罗庚获得法国 Nancy 大学名誉博士.——译者注

$=b$, $a=\frac{k(k+1)}{2}-2t$, $b=\theta\vartheta_0\mathcal{O}$,此处 b 为依赖于 t(不依赖于 P)的一个正常数.当 $k>10$ 时,$t_0=[k^2(3\log k+\log\log k+4)]$.而 t_0 的其他值则由一张表给出来.定理的证明中用到了 Hardy-Littlewood 的圆法,其中当 $t>k^2$ 时,奇异级数 $\mathcal{O}$ 收敛,而 $t=1+\frac{k(k+1)}{4}$ 时发散.该文还研究了将 $\mathcal{O}$ 表为 p - adic 密度的发散问题,并证明了当 $t>1+\frac{k(k+1)}{4}$ 时收敛,证明中用到了各种三角和与积分的估计.

代数部分包括了有限群、可除代数与典型群的工作.例如,华罗庚与 I. Reiner 合作的一篇论文中,给出了 Siegel 模群 $S_p(n,\mathbb{Z})$ 的生成元.在第 528 页开始的一篇论文中,华罗庚证明了 $K^{n\times m}(1<n\leqslant m)$ 上,即长方矩阵空间上仿射几何的基本定理,其中 K 为一个体.定理可以叙述为:一个将 $K^{n\times m}\longrightarrow K^{n\times m}$ 的一一对应全映射 T,如果保持粘切,则必具形式 $T(Z)=PZ^{\sigma}Q+R$,此处 $P\in GL(n,K)$,$Q\in GL(m,K)$,$R\in K^{n\times m}$ 及 σ 为 K 的自同构,其中矩阵 M 与 N 粘切的含义为 $\mathrm{rank}(M-N)=1$. *

函数论部分包括了很多有趣的文章. 1935 年, Elie Cartan 将既约齐次有界对称域加以分类. Carl Ludwig Siegel 深入地研究了其中的一类及其在 Abel 函数与二次型理论方面的应用. 华罗庚在研究这些域的时候,并不了解 Cartan 与 Siegel 的工作. 在这部分第一篇文章的附注中(见第 636 页),华罗庚表示了他对 Weyl,唐培径与陈省身分别送给他 Siegel, G. Giraud 与 Cartan 文章的感谢. 在这篇题为"矩阵变元的自守函数论I(几何基础)"中,作者研究了 Siegel 上半平面及其他三类有界对称典型域中的测地线. 这篇文章的最后一条定理证明了,这三种有界对称域的 Riemann 曲率都是非正的. 在文章"多变量 Fuchsian 函数论"

---

* 当 $m=n$ 时,还需加上变换 $T(Z)=PZ^{\prime\tau}Q+R$,此处 τ 为 K 的反自同构.——译者注

中，作者研究了诸有界域 $R\in\mathbb{C}^n$ 及作用于这些域的离散群 Γ. 定理 8 证明了 Γ 在 R 中有一个基域. 定理 12—14 给出了用积分判别法得出的 Poincare Theta 级数的收敛性. 由 Γ 定义的 Fuchsian 函数在 R 上是解析的而且是 Γ 不变的. 定理 15 证明了 Γ 有 n 个代数独立的 Fuchsian 函数. 本文第 10 节研究了 Fuchsian 函数的 $\mathbb{C}^n$ 值类似. 华罗庚表示了他未能消除基域紧致性的假设而感到遗憾. 在论文“多复变空间的 Riemann 曲率”中，作者研究了关于 L^2（D）的完整正交系的 S. Bergman 核定义的 Riemann 度量，此处 $D\subset\mathbb{C}^n$ 是一个有界单叶区域. B. A. Fuchs 证明了 Riemann 曲率 $R\leqslant 2$. * 华罗庚也证明了每一个具有常曲率的非连续化有界区域可以解析全映射于单位球. 在论文“典型域的调和函数论”中，作者推广了经典调和函数论的许多方面，例如有界对称域的 Poisson 公式.

在其他部分，包括了在等高线地图上关于矿藏储量与山坡面积计算的文章与使用分圆数得到的一致分布贯与数值积分的文章.

在最后一节里，华罗庚列举了他关于普及数学的工作项目名称，但未给出细节. 列举的范围之广仍给人以深刻印象.

（见 Andrey, A. Terras, “Selected papers; Loo Keng Hua Edited by H. Halberstam, Springer, 1983.” Math, Rev; 1984m, 01045. 王元译）

§1.5 评论之二（贝特曼）

华罗庚的经历是近代数学史中最令人感兴趣的事情之一. 他出身贫寒，只受过九年正规教育，但他成功地从自学数学的天才青年成长为造诣高深、有多方面创造的数学大师. 此外，他又是推动将数学工具最大限度地用于实际，强调好的数学教学法的重

* 华罗庚对这一结果作了改进. ——译者注

要性的带头人. 以他自己的研究方向在美国与中国产生了巨大的影响，而且，他一直是中华人民共和国第一流的科学巨人之一.

华罗庚生于1910年，除1936年至1938年生活在英国及1946年至1950年生活在美国外，他的一生都在中国度过，在与西方数学家隔离四分之一个世纪后，他于1978年又重新出现在国际数学舞台上. 这是一件非常令人愉快的事情.

若选一个为全世界最多数人所知道的数学家，华罗庚显然会取胜. 在中国，他受到这样大的崇敬，以致以他的少年时代为题材拍摄了一部电视连续剧. 当今还没有一个西方数学家像他这样为大众所了解.

将华罗庚与老一代著名的印度数学家史罗尼瓦沙·拉马努将(S. Ramanujan)相比较是很自然的，他们既有惊人的类似之处，同时又有明显的差异. 两人主要都是自学成才的，都得益于在哈代(G. H. Hardy)领导之下，在英国从事过一段时间的研究工作. 对于沟通东方与西方的差异，并使其祖国步入数学研究的天地，各自都起了相当大的作用. 他们像爱因斯坦(A. Einstein)在美国一样，最后成为本国传奇式的科学家. 另一方面，他们两人之间又有截然不同之处. 首先，拉马努将并没有全部完成由一个自学天才到一个成熟与训练有素的数学家的转变，他在某种程度上保留了数学的原始性，甚至保留了一定程度的猜谜性质. 然而华罗庚在其数学生涯的早期就已是居主流地位的数学家了，其次，拉马努将与哈代的接触更直接，更有决定性意义. 例如，拉马努将1914年到达美国以后，他送到印刷厂的许多论文都是哈代的手迹. 虽然华罗庚在英国工作时得益甚大，但他与哈代在数学方面的接触显然不是这样特别集中的. 最后，拉马努将的生存能力以及适应各种不同的生活条件的能力显然不足. 华罗庚在某种意义下是一个生存者，他明显地能够适应各种不同的学术、政治与饮食条件.

判断一个数学家应该看他的研究成就，而不是看他得到的大学学位的数目. 对于华罗庚来说，他有很多成就，却没有一个学

位．华罗庚的研究领域遍及数论、代数、矩阵几何学、典型群、多复变数函数论、调和分析与应用数学．

华罗庚最出名的工作可能是他的数论工作，特别是关于华林(G. Waring)问题的工作．华林问题本身是关于将正整数表示为有限多个特定整数 k 的 k 次幂之和的问题．在整数与 k 次幂上面均可以加以限制条件，并可以将 k 次幂推广为其他的整值多项式．华罗庚取得的结果之一是他证明了定理：每个充分大的奇数都是九个素数的立方之和．对于解析数论专家来说，他最重要的结果是他的定理：若 q，a_1，…，a_k 为没有公因子的正整数，及 ϵ 为一个正数，则

$$\left|\sum_{x=1}^{q} e^{2\pi i(a_1x+a_2x^2+\cdots+a_kx^k)/q}\right| \leqslant cq^{1-\frac{1}{k}+\epsilon},$$

此处 c 是一个仅依赖于 k 与 ϵ 的常数．另一个重要结果是通常所称的华氏引理或华氏不等式

$$(*)\int_0^1\left|\sum_{m=1}^{N} e^{2\pi i\alpha m^k}\right|^{2^k} d\alpha \leqslant cN^{2^k-k+\epsilon},$$

此处 c 为一个依赖于正整数 k 及正数 ϵ 的常数，由不等式(*)可以相当简洁地证明：每个充分大的正整数可表为不超过 2^k+1 个正整数的 k 次幂之和(这个简短证明可见沃恩(R. C. Vaughan)的书 The Hardy-Littlewood Method, Camb. Univ. Press, 1981 的第二章)．

关于华罗庚在数论以外的工作，我们列举两个在体(Skew-field)或可除环 F 的基本性质方面的简单结果．

(1)若 σ 是 F 至(onto)其自身的一个一一映射，且对于所有 F 中的元素 a, b 均有

$$(a+b)^\sigma = a^\sigma + b^\sigma, (aba)^\sigma = a^\sigma b^\sigma a^\sigma,$$

则对于所有 F 中的元素 a, b，或者 $(ab)^\sigma = a^\sigma b^\sigma$，或者 $(ab)^\sigma = b^\sigma a^\sigma$．

(2)若 $ab \neq ba$，则

$$a = \{b^{-1} - (a-1)^{-1}b^{-1}(a-1)\}$$

$$\{a^{-1}b^{-1}a-(a-1)^{-1}b^{-1}(a-1)\}^{-1}.$$

由这个恒等式立刻可以推算出所谓仆劳威尔-嘉当-华氏(Brauer-Cartan-Hua)定理;体的每个真的正规(normal)子体一定含于它的中心(center)之中.

这两个结果既没有一口井那么深,也没有一扇门那么宽(not so deep as a well,nor so wide as a church-door)像茂丘西奥(Mercutio)的伤口一样,这两个结果是致命的(注:见莎士比亚的《罗米欧与朱丽叶》).

华罗庚在我国借以成名的绝大多数研究是他在1950年回中国之前做的.人们可能会设想,如果他留在西方,他将可能完成更多的个人研究计划;然而,如果这样做,他就不可能如他最后30年所做的,在中国发展数学及其应用中起到中心作用.总之,华罗庚的学术总成就达到很高的水平,他可以被选为任何学术社团的成员或任何科学院院士.

本书约含华罗庚论文的三分之一,按目前的惯例,本书是按原始杂志通过照相制版编排的,从而存在相当多的印刷质量问题.本书论文的选取是适当的,但由于华罗庚的许多论文是发表在印刷质量低劣的杂志上而不得不放弃了,因而本书论文的选取无疑受到了影响.

这本文集是20世纪数学中的一个伟大人物的丰碑.

(见 P. T. Bateman,"Selected Papers of Loo-Keng Hua,Edited by H. Halberstam,Springer,1983,"Math. Monthly,Jan. 1986,67—69. 王元译,刘峰校)

第二章　数　　论

§2.1　完整三角和

命 q 为正整数，$e(x)=e^x$ 及 $f(x)=a_kx^k+\cdots+a_1x$ 为一个整系数 k 次多项式. 我们称三角和

$$S(f(x),q)=\sum_{x=1}^{q}e(2\pi if(x)/q)$$

为完整三角和，其中 $(a_k,\cdots,a_1,q)=1$. 当 $k=2$ 时，下面简单的三角和

$$S(ax^2,q)=\sum_{x=1}^{q}e(2\pi iax^2/q)$$

就是著名的 Gauss 和. C. F. Gauss 首先引进了这个和，并得了估计

$$|S(ax^2,q)|\leqslant\sqrt{2q}.$$

他还将这一估计用于二次互反律的证明. 华罗庚于 1939 年证明了

定理 2.1　对于任何 $\varepsilon>0$ 皆有

$$|S(f(x),q)|\leqslant c(k,\varepsilon)q^{1-\frac{1}{k}+\varepsilon},$$

此处 $c(k,\varepsilon)$ 是一个依赖于 k,ε 的常数.

取素数 p 满足 $(p,k)=1$，则当 $(a,p)=1$ 时有

$$|S(ax^k,p^k)|=p^{k\left(1-\frac{1}{k}\right)}.$$

所以定理 2.1 中 q 的阶，除一个因子 q^ε 之外是最佳可能的.

现在将定理 2.1 的证明描述于下：我们恒用 p 表示素数. 不难证明，若当 $q=p^l(l\geqslant1)$ 时定理 2.1 成立，则定理 2.1 对于一般整数 q 亦成立. 因此定理 2.1 的证明可以归结为 $q=p^l$ 的情形来加以证明.

关于 l 用归纳法. 当 $l=1$ 时，定理 2.1 由 L. J. Mordell 定理

$$|S(f(x),p)|\leqslant c(k)p^{1-\frac{1}{k}}$$

立即得到.现在假定 $l>1$ 及定理 2.1 对于 $q=p^s$ 成立,此处 $s<l$.我们用 $p^t\parallel x$ 表示 $p^t|x$ 而 $p^{t+1}\nmid x$,假定 $p^t\parallel(ka_k,\cdots,2a_2,a_1)$.设 $\mu_1,\cdots,\mu_r$ 为同余式

$$f'(x)\equiv O(\bmod p^{t+1}),\quad 0\leqslant x<p$$

的重数分别为 $m_1,\cdots,m_r$ 的解.命 $m_1+\cdots+m_r=m$.则 $m\leqslant k-1$.今用归纳法证明

$$|S(f(x),p^l)|\leqslant k^2\max(1,m)p^{\left(1-\frac{1}{k}\right)l}.$$

当 $l<2(t+1)$时,上式易于证明.当 $l\geqslant 2(t+1)$时,

$$S(f(x),p^l)=\sum_{\nu=1}^{p}\sum_{\substack{0\leqslant x<p^l\\ x\equiv\nu(\bmod p)}}\mathrm{e}(2\pi\mathrm{i}f(x)/p^l)=\sum_{\nu=1}^{p}S_\nu(\text{定义}).$$

当 ν 非 μ_i 之一时,可得 $S_\nu=0$.最后用归纳法假定处理最困难的部分,即 S_{μ_i} 的估计.

注记.若用 A. Weil(1942)定理:

$$|S(f(x),p)|<k\sqrt{p}$$

代替 Mordell 定理,则定理 2.1 可以改进为

$$|S(f(x),q)|\leqslant c(k)q^{1-\frac{1}{k}}.$$

1957 年,华罗庚证明了

定理 2.2 对于 $\epsilon>0$ 及整数 a,b,q,其中$(a,q)=1$,皆有

$$|S(ax^k+b,q)|\leqslant c(k,\epsilon)q^{\frac{1}{2}+\epsilon}(q,b).$$

上面公式中的 $q^{\frac{1}{2}+\epsilon}$是最佳可能的,国际上称为 Weil-华氏不等式,它对 Waring 问题有重要的应用.

§2.2 三角和的积分平均估计

命 $N>1$ 及 $f(x)=a_kx^k+\cdots+a_1x$ 为一个整系数多项式,其中 $a_i=O(N^{k-i})$. $1\leqslant i\leqslant k$.又命

$$T(f(x),N)=\sum_{x\in M(N)}\mathrm{e}(2\pi if(x)\alpha),$$

其中 $M(N)$ 是适合 $-N\leqslant x\leqslant N$ 的整数的一个子集，但在不同地方表示不同的集合. 1938 年，华罗庚证明了

定理 2.3 对于任何 $\epsilon>0$，若 $1\leqslant j\leqslant k$，则

$$\int_0^1|T(f(x),N)|^{2^j}d\alpha\leqslant c(k,\epsilon)N^{2^j-j+\epsilon}.$$

定理 2.3 的证明仍用归纳法. 当 $j=1$ 时，上式左端的积分等于方程

$$f(x)=f(y),\quad x,y\in M(N)$$

的解数. 给予 y，最多只有 k 个 x 适合上式. 所以定理成立. 现在假定 $1\leqslant j<k$ 及定理 2.3 对于 j 成立. 今将证明定理对于 $j+1$ 亦成立，连续运用 Hölder 不等式得

$$|T(f(x),N)|^{2^j}\leqslant c(j)\Big(N^{2^j-1}$$

$$+N^{2^j-j-1}\sum\cdots\sum_{x_1,\cdots,x_{j-1}\in M(2T)}\sum_{x,x+x_j}{}^{*}\mathrm{e}(x_1\cdots x_jh(x,x_1,\cdots,x_j)\alpha)\Big),$$

此处 $h(x,x_1,\cdots,x_j)$ 是一个 $x,x_1,\cdots,x_j$ 的 $k-j$ 次多项式：

$$h(x,x_1,\cdots,x_j)=\beta_{k-j}x^{k-j}+\cdots+\beta_1x,$$

$$\beta_i=O(N^{k-j-i}),\quad 1\leqslant i\leqslant k-j,$$

及 $\sum^*$ 表示条件 $x_1\cdots x_jh(x,x_1,\cdots,x_j)\neq0$，上式双方乘以 $|T(f(x),N)|^{2^j}$，再关于 α 求积分即得

$$\int_0^1|T(f(x),N)|^{2^{j+1}}\mathrm{d}\alpha\leqslant c(j)(N^{2^j-1}I_1+N^{2^j-j-1}I_2),$$

其中

$$I_1=\int_0^1|T(f(x),N)|^{2^j}\mathrm{d}\alpha$$

及 I_2 表示不定方程

$$x_1\cdots x_jh(x,x_1,\cdots,x_j)=f(y_1)+\cdots f(y_{2^{j-1}})$$
$$-f(z_1)-\cdots-f(z_{2^{j-1}})$$

的解数，其中 $x_1,\cdots,x_{j-1}\in M(2N)$，$x$，$x+x_j$，$y_1$，$\cdots$，

$z_{2^{l-1}}\in M(N)$. 由归纳法假定易得定理 2.3.

§2.3 堆垒素数论

本节将阐述华罗庚关于指数和估计的结果在堆垒素数论方面的应用. 为简单记, 我们暂时先考虑变数为整数的情形.

命 $P=[N^{\frac{1}{k}}]$, 其中 $[x]$ 表示 x 的整数部分, 而 $f(x)$ 为一个首项系数为正的 $k(\geqslant 2)$ 次整系数多项式, 考虑三角和

$$T(\alpha)(=T(f(x),P))=\sum_{x=1}^{P}\mathrm{e}(2\pi\mathrm{i}f(x)\alpha).$$

则

$$r_s(N)=\int_0^1 T(\alpha)^s\mathrm{e}(-2\pi\mathrm{i}N\alpha)d\alpha=\int_{-\frac{1}{\tau}}^{1-\frac{1}{\tau}}T(\alpha)^s\mathrm{e}(-2\pi\mathrm{i}N\alpha)\mathrm{d}\alpha$$

就是不定方程

$$f(x_1)+\cdots+f(x_s)=N,\quad x_i\geqslant 1$$

的解数, 此处 $\tau=2kP^{k-1}$.

用 $\mathfrak{M}_{h,q}$ 表示以有理数 h/q 为中心的区间:

$$\left[\frac{h}{q}-\frac{1}{q\tau},\quad \frac{h}{q}+\frac{1}{q\tau}\right],$$

此处 $(h,q)=1$ 及 $q\leqslant P^{\beta}$, 其中 $\frac{1}{4}\leqslant\beta\leqslant 1-\frac{1}{k}$. 可以证明当 N 充分大时, $\mathfrak{M}_{h,q}$ 互不重叠. 命

$$\mathfrak{M}=\bigcup_{q\leqslant P^{\beta}}\ \bigcup_{(h,q)=1}\mathfrak{M}_{h,q}.$$

我们称 $\mathfrak{M}$ 为优弧. $\mathfrak{M}$ 关于 $\left[-\frac{1}{\tau},1-\frac{1}{\tau}\right]$ 的补集 m 则称为劣弧.

当 $\alpha\in\mathfrak{M}_{h,q}$ 时, 置 $x=qy+r$ 及 $\alpha=\frac{h}{q}+\vartheta$. 则

$$\begin{aligned}T(\alpha)&=\sum_{r=1}^{q}\mathrm{e}\left(\frac{2\pi\mathrm{i}f(r)h}{q}\right)\int_{0<qt+r\leqslant P}\mathrm{e}(2\pi\mathrm{i}f(qt+r)\theta)\mathrm{d}t+O(q)\\&=\frac{1}{q}S(hf(r),q)\int_0^P\mathrm{e}(2\pi\mathrm{i}f(x)\vartheta)\mathrm{d}x+O(q).\end{aligned}$$

所以 $T(\alpha)$在 $\mathfrak{M}_{h,q}$上的估计涉及到完整三角和$S(hf(r),q)$的估计.利用华氏定理(定理 2.1)即可得,当 $s\geqslant 2k+1$ 时,

$$\sum_{\mathfrak{M}_{h,q}}\int_{\mathfrak{M}_{h,q}} T(\alpha)^s e(-2\pi i N\alpha)d\alpha \sim c(f(r),s,N)N^{\frac{s}{k}-1},$$

其中 $c(f(x),s,N)$是一个常数.

现在如果能证明

$$\int_m T(\alpha)^s e(-2\pi i N\alpha)d\alpha = o(N^{\frac{s}{k}-1})$$

及 $c(f(x),s,N)>0$,则得 $r_s(N)$的渐近表达式.在劣弧 m 上用 Weyl 的估计:对于任何 $\varepsilon>0$ 皆有

$$\max_{\alpha\in m}|T(\alpha)|\ll P^{1-2^{1-k}+\varepsilon}.$$

于是由华氏不等式(定理 2.3)可知,当 $s\geqslant 2^k+1$ 时,取 $\varepsilon=3^{-1}2^{1-k}$即得

$$\begin{aligned}\int_m T(\alpha)^s e(-2\pi i N\alpha)d\alpha &\ll \int_m |T(\alpha)|^s d\alpha\\ &\ll P^{s-2^k-1}\int_m |T(\alpha)|^{2^k+1}d\alpha\\ &\ll P^{s-2^k-1+1-2^{1-k}+\varepsilon}\int_0^1 |T(\alpha)|^{2^k}d\alpha\\ &\ll P^{s-k-2^{1-k}+2\varepsilon}\ll P^{s-k+\varepsilon}\ll N^{\frac{s}{k}-1-\frac{\varepsilon}{k}}.\end{aligned}$$

欲证明对于某一个 $f(x)$及 s 有$c(f(x),s,N)>0$ 颇复杂.可以证明当 $s\geqslant 4k$ 及$f(x)=x^k$ 时有$c(f(x),s,N)\gg 1$,若不计$c(f(x),s,N)$是否为正的问题,则当 $s\geqslant 2^k+1$, $r_s(N)$就有一个渐近公式.用 Vinogradov 方法代替 Weyl 定理则可以证明当 $k>10$ 及

$$s\geqslant 2k^2(2\log k+\log\log k+2.5)$$

即得 $r_s(N)$的渐近公式.上述结果比 Vinogradov 原来的结果稍强一点.这是由华罗庚对 Vinogradov 方法作了一些改进与简化而得到的结果.

如果用

$$T_1(\alpha) = \sum_{p \leqslant P} e(2\pi i f(p)\alpha)$$

代替 $T(\alpha)$,此处 p 是区间$[1,P]$中的素数,并用 Vinogradov 关于素数变数三角和的估计,则可以求解不定方程

$$f(p_1) + \cdots + f(p_s) = N,$$

其中 $p_i's$ 表示素数.

华罗庚将他关于三角和估计的两条定理及将 Vinogradov 关于三角和估计的两个方法加以改进与简化,并将它们系统地用于堆垒素数论.他将上述工作写成了专著《堆垒素数论》,于 1947 年在苏联以俄文出版.1953 年才由科学出版社将它译成中文出版,其中华罗庚改写了几章,特别是第五章,将 Vinogradov 1942 至 1947 年间的工作及他自己 1947 年的工作包括了进去.1957 年,科学出版社又出版了该书的修订本.其中第四章与第五章颠倒了次序,他对其中的一些结果作了改进.他还重写了第九章.以后该书被译成了德文、匈牙利文与英文在国外出版.日本江田义计教授还将该书译为日文.

§2.4 评论之三(贝特曼)

这是写于 1941 年的一份英文手稿,由 B. I. Segal 与 D. A. Vasilkov 翻译成了俄文.本书起始于著名的表正整数为给定数目的素数 k 次方幂之和问题的详细阐述,即所谓 Waring-Goldbach 问题.首先是 Vinogradov 研究处理了这个问题(见 C. R. (Doklady) Acad . Sci; URSS(N. S.)16,131—132(1937);Trav. Inst. Math. Tbilissi(Trudy Tbiliss Mat. Inst.)3,1—67(1938)),而由作者加以继续研究的(见 C. R. (Doklady)Acad. Sci. ;URSS(N. S.)17,167—168(1937);18,4(1938);Math. 2;44,335—346(1938)).但是,本书的很多内容都是原始性的工作.所有工作都是 Vinogradov 处理特殊的 Goldbach 问题所用方法的拓广与发展(见 C. R. (Doklady) Acad. Sci. ;URSS(N. S.)15,291—294(1937);Rec. Math. ;(Mat.

Sbornik)N.S.2(44),179—194(1937)).

第Ⅰ章,作者证明了下面关于三角和的两条定理(见华罗庚,J.Chinese Math. Soc.;2,301—312(1940);本评论,2,347).若 $f(x)=a_kx^k+\cdots+a_1x$,此处 $a_1,\cdots,a_k$ 为满足 $(a_1,\cdots,a_k,q)=1$ 的整数,则

$$\left|\sum_{x=1}^{q}\exp(2\pi\mathrm{i}f(x)/q)\right|\leqslant c(k,\varepsilon)q^{1-\frac{1}{k}+\varepsilon},$$

此处 ε 为任意正数及 $c(k,\varepsilon)$ 表示一个依赖于 k 与 ε 的正常数,若进一步假定 $(a_2,\cdots,a_k,q)=1$,则对于任何正整数 m 皆有

$$\left|\sum_{x=1}^{m}\exp(2\pi\mathrm{i}f(x)/q)-mq^{-1}\sum_{x=1}^{q}\exp(2\pi\mathrm{i}f(x)/q)\right|\leqslant c_1(k,\varepsilon)q^{1-\frac{1}{k}+\varepsilon}.$$

需注意者,不管是原始论文,还是本书,在第二个定理中的假设条件都未引入.实际上,若不引进这个条件,则还需在估计式中添上因子 $(a_2,\cdots,a_k,q)^{1/k}$.

在第Ⅱ章中,作者将用第Ⅰ章的结果来证明关于多项式函数值因子的定理:若 $f(x_1,\cdots,x_n)$ 是一个 k 次有整系数且系数的最大公因子为 1 的多项式,则

$$\sum_{x_1=1}^{P}\cdots\sum_{x_n=1}^{P}d^l(|f(x_1,\cdots,x_n)|)\leqslant c_2(k,n,l)A(\log X)^{c_3(k,n,l)},$$

$$f(x_1,\cdots,x_n)\neq 0,$$

此处 $d(m)$ 表示 m 的因子个数,X 为当 $1\leqslant x_1,\cdots,x_n\leqslant P$ 时,$|f(x_1,\cdots,x_n)|$ 的最大值,及 $A=\max(P^n,X^{n/k})$.

上述结果在第Ⅲ章中将用来证明关于三角和的一个中值定理:命 $f(x)$ 为一个 k 次整值多项式及 $T(\alpha)=\sum_{x=1}^{P}\exp(2\pi\mathrm{i}f(x)\alpha)$.则当 $1\leqslant\nu\leqslant k$ 时有

$$\int_0^1|T(\alpha)|^{2^\nu}\mathrm{d}\alpha\leqslant c_4(k,\nu)P^{2^\nu-\nu}(\log P)^{c_5(k,\nu)}\mathrm{d}^{\nu-1}(u),$$

此处 u 是 $f(x)$ 系数分子的最大公约.

第Ⅳ章与作者的一篇文章本质上是一样的(见 Quart. J. Math. Oxford, ser. 11, 161～176(1940);本评论, 2, 150). 作者在本章中将证明了下面的定理:若 $2\leqslant k\leqslant 10$ 及 $C_k=C_k(\alpha_1,\cdots,\alpha_k)=\sum_{x=1}^{P}\exp(2\pi i(\alpha_k x^k+\cdots+\alpha_1 x))$, 则

$$\int_0^1\cdots\int_0^1|C_k|^\lambda d\alpha_1\cdots d\alpha_k\leqslant c_6(k,\varepsilon)P^{\lambda-\frac{1}{2}k(k+1)+\varepsilon},$$

此处 $\lambda=\lambda(k)$ 为一个偶数,它由一个表给出:$\lambda(2)=6,\cdots,\lambda(10)=9190$. 当 k 小时,这比所谓的 Vinogradov 中值定理要精密些(见 Vinogradov, Rec. Math. (Mat. Sbornik) N. S. 3(45), 435—470, (1938), 引理 6).

在第Ⅴ章中,作者将给出 Vinogradov 中值定理一个原创性的证明. 现在将定理陈述于下:假定 $C_k=\sum_{x=1}^{P}\exp(2\pi i(\alpha_k x^k+\cdots+\alpha_1 x))$, $b=b(k)=2\left[\frac{1}{4}(k+1)(k+2)\right]$及 $k\leqslant n\leqslant c_7(k)$, 则

$$\int_0^1\cdots\int_0^1|C_k|^{bn}d\alpha_1\cdots d\alpha_k\leqslant c_8(k)P^{bn-\frac{1}{2}k(k+1)+\frac{1}{2}k(k+1)\sigma},$$

此处 $\sigma=\left(1-\frac{1}{k}\right)^n$. 这条中值定理有下面两个推论:若 $f(x)$ 为一个 k 次整值多项式,则

$$\int_0^1\left|\sum_{x=1}^{P}\exp(2\pi i f(x)\alpha)\right|^{bn}d\alpha\leqslant c_9(k)P^{bn-k+\frac{1}{2}k(k+1)\sigma},$$

此处 $b=2\left[\frac{1}{4}(k+1)(k+2)\right]$, $k\leqslant n\leqslant c_{10}(k)$, $\sigma=\left(1-\frac{1}{k}\right)^n$; 及若 $\alpha_1,\cdots,\alpha_k$ 为实数, $k\geqslant 14$ 及 $|\alpha_k-h/q|\leqslant q^{-2}$, 此处 $(h,q)=1$, $q>0$, 则当 $P^{1-\varepsilon}\leqslant q\leqslant P^{k-1+\varepsilon}$ 时有

$$\left|\sum_{x=1}^{P}\exp(2\pi i(\alpha_k x^k+\cdots+\alpha_1 x))\right|\leqslant c_{11}P^{1-\rho+\varepsilon},$$

此处 $\rho>\alpha/k^3(\log k^2+2.2\log\log k^2)$. 在下一评论中将评论本章所作的改进.

Vinogradov 关于 Waring-Goldbach 问题的一个基本定理将于

第Ⅵ章中给出(见 Trav. Inst. Tbilissi(Trudy Tbiliss Math. Inst.) 31—67(1938),定理 1).但是,作者在此作了改进使之可以用于联立 Waring-Goldbach 问题.定理叙述于下:假定 $0 < Q \leqslant c_{12}(k)(\log P)^{\sigma_1}$,$\alpha_1, \cdots, \alpha_{k-1}$ 为实数,h, q 满足 $(h,q)=1$ 及 $(\log P)^{\sigma} < q \leqslant P^k(\log P)^{-\sigma}$,则当 σ_0 为一个正数及 $\sigma \geqslant 2^{6k}(\sigma_0 + \sigma_1 + 1)$ 时有

$$\left|\sum_{\substack{p\leqslant P\\ p\equiv l(\bmod Q)}} \exp(2\pi i(hq^{-1}x^k + \alpha_{k-1}x^{k-1} + \cdots + \alpha_1 x))\right| \leqslant c_{13}(k)P(\log P)^{-\sigma_0}Q^{-1}.$$

利用上面几章的结果及 Hardy-Littlewood-Vinogradov 方法,在第Ⅶ章中,作者建立了关于 Waring-Goldbach 问题解数的一个渐近公式.更一般些,他证明了下述结果:命 $f(x)$ 为一个首项系数为正数 A 的 k 次整值多项式并假定不存在整数 q 使 $f(x) \equiv f(0)(\bmod q)$ 对所有 x 皆成立.命 $I_s(N)$ 表示不定方程 $f(p_1)+\cdots+f(p_s)=N$ 的解数,此处 p_i's 均为素数,则当 $s \geqslant 2^k+1(1\leqslant k \leqslant 14)$ 与 $s \geqslant k^3(\log k + 2.2\log\log k)(k \geqslant 14)$ 时有

$$\left| I_s(N) - A^{-sn}\frac{\Gamma^s(1/k)}{\Gamma(s/k)} \cdot \frac{N^{\frac{s}{k}-1}}{(\log N)^s}\mathfrak{S}(N)\right| < c_{14}(k,s,f)N^{\frac{s}{k}-1}\frac{\log\log N}{(\log N)^{s+1}},$$

此处 $\mathfrak{S}(N)$ 表示所谓的奇异级数(它当然可以明确地表示出来).这是本书中唯一不能自给自足的一条定理.这是由于其中用到了算术级数中素数个数的一条定理,即当算术级数项目增加时,其公差范围的增加是较慢的(见 Walfisz, Math. Z. 40, 592—607(1935),引理 3).这是 Siegel 关于 Dirichlet $L(s,\chi)$ 函数在 $s=1$ 处值的下界估计的一个推论,此处 χ 为实特征(见 Acta Arith; 1, 83—86 (1935)),最近,Estermann 给予 Siegel 定理一个简单的证明(见 J. London Math. Soc; 23, 275—279(1948);本评论, 10, 356),从而使 Walfisz 定理并不像原来想象得那样艰深了.

在第Ⅷ章中,作者研究了 Waring-Goldbach 问题的奇异级数

(见华罗庚,Math. Z. 44,335—346(1938)).华罗庚证明了下面的结果:命 $K=2(2\nmid k)$ 及 $K=2\prod_{(p-1)\mid k} p^{\theta+1}(2\mid k)$,此处 $\theta=\theta(p)$ 为 k 中 p 的准确因子数,即 $p^{\theta}\mid k$ 而 $p^{\theta+1}\nmid k$.则当 $s\geqslant 3k+1$ 及 $N\equiv s\pmod{K}$ 时,对于 $f(x)=x^k$,奇异级数 $\mathfrak{S}(N)$ 大于一个正常数.由前几章的定理可知,这个结果表明:若 H(k)表示最小的正整数 s 使每一个满足 $N\equiv s\pmod{K}$ 的大整数 N 都是 s 个素数的 k 次方幂之和,则 $H(k)\leqslant 2^k+1\ (1\leqslant k<14)$ 及 $H(k)\leqslant k^3(\log k+2.2\log\log k)\ (k\geqslant 14)$.

在第Ⅸ章中,作者证明了:$H(k)\leqslant 2k+2m+7\sim 6k\log k$,此处 $b=k^3(\log k+1.1\log\log k^2)\ (k\geqslant 14)$,$b=2^{k-1}\ (4\leqslant k<14)$ 及 $m=\left[\left(\log\frac{1}{2}b+\log(1-2/k)\right)\left(1-\log\left(1-\frac{1}{k}\right)\right)^{-1}\right]$.他还证明了 $H(4)\leqslant 15$,$H(5)\leqslant 25$,$H(6)\leqslant 39$,$H(7)\leqslant 55$ 及 $H(8)\leqslant 75$.

作者在下面两章中处理了联立 Waring-Goldbach 问题,即寻找使不定方程组 $p_1^k+\cdots+p_s^k=N_k,\cdots,p_1+\cdots+p_s=N_1$ 可解的充分条件,此处 $p_i's$ 为素数.在第Ⅹ章中,作者建立了当 $s\geqslant s_0\sim 4.14k^3\log k$ 时,上面方程组解数的渐近公式.在第Ⅺ章中,作者讨论了当 $s\geqslant s_0\sim 7k^2\log k$ 时,方程组的可解性问题.

在第Ⅻ章中,作者指出了可以用本专著的方法处理的一些其他问题.最后,在第ⅩⅢ章中,作者给出了 Vinogradov 中值公式一个推论,并指出了它的一些重要应用.

因为在写这本书的时候,Waring-Goldbach 问题已经有了颇大的进展(例如 Vinogradov, C. R. (Doklady) Acad. Sci; URSS. (N. S.)34,182—183(1942);本评论,4,211),特别,关于第Ⅴ章,下面评论的作者文章中证明了当 $s\geqslant s_0\sim 4k^2\log k$ 时,Waring-Goldbach 问题的渐近公式即成立,而且 $H(k)\leqslant s_0\sim 4k\log k$.联立方程组的渐近公式可以在 $s\geqslant s_0\sim 6k^2\log k$ 时建立及可以在 $s\geqslant s_0\sim 3k^2\log k$ 时讨论其可解性.同时我们还必须注意到 Linnik (Rec. Math. (Mat. Sbornik) N. S. 19(61),3—8(1946);本评论,8,317)与 Tchudakoff(Ann. of Math.;2(48),515—545(1947);本评论,9,11)关

于 Goldbach-Vinogradov 定理的新证明；这些证明中用到了 $L(s,\chi)$更深刻的理论来代替 Vinogradov 关于三角和的估计.

（见 P. T. Bateman,"L. K. Hua, The Additive Prime Number Theory, Trav. Inst. Math.; Stekloff 22, 1947"; Math. Rev.; 10, 597, 1949, 王元译）.

§2.5　评论之四(熊飞尔德)

本文给出了一个自给自足的简洁方法处理文章题目所说的事情.所谓中值定理是说不定方程组 $\sum_{t=1}^{s}(x_t^h - y_t^h) = 0$, $1 \leqslant h \leqslant k$ 满足 $T < x_t, y_t \leqslant T + P$ 的解数不超过$(7s)^{4sl}(\log P)^{2l}P^{2s-\frac{k(k+1)}{2}+\delta}$，其中 $s \geqslant k(k+1)/4 + lk$, $P \geqslant 2$ 及 $\delta = k(k+1)\left(1-\frac{1}{k}\right)^l/2$.（本文恒假定 $k>1$）.这是作者的书(见上面贝特曼的评论)中结果的重大改进,在那里 s 本质上要求比这里大一个因子 $2k$.定理的证明方法与书中的方法是类似的.由这一结果可以得出下面关于 Weyl 和 $S = \sum_{x=1}^{P}\exp(2\pi i\alpha x^k)$ 的一个估计：命 $|\alpha - h/q| \leqslant q^{-2}$, $(h,q)=1$ 与 $P \leqslant q \leqslant P^{k-1}$.则 $|S| < c(k)P^{1-\frac{1}{\sigma}}$,此处当 $k\to\infty$时,σ 渐近地等于 $4k^2\log k$.在 Vinogradov 的书中,σ 则渐近于 $6k^2\log k$（见本评论）,而在华罗庚的书中,σ 渐近于$k^3\log k$.作者指出这一结果可以用来证明当 $s \geqslant s_0 \sim 4k^2\log k$ 时,将 N 表示为 s 个 k 次整数方幂之和的表法个数的 Hardy-Littlewood 渐近公式成立.这可以与 Vinogradov 书中的 $s \geqslant s_1 \sim 10k^2\log k$ 相比拟.因此本文的结果与 Vinogradov 书上的结果具有同等深度.作者还指出 Vinogradov 方法看来已达到了最终阶段.

文中有一些明显的印刷错误,此外还有两个地方需作小修正：在定理 4 中,S 的估计应加上一个因子 $\log P$ 及在定理 3 的积分估计中应加上一个因子 2^k.但这些均不影响主要结果的正确性.

(见 L. Schoenfeld, "L. K. Hua, An improvement of Vinogradov's mean value theorem and several applications, Quart. J. Math.; Oxford Ser.; 20, 48—61 (1948)", Math. Rev.; 10, 597, 1949. 王元译)

§2.6 评论之五(库几亚尼)

这本书是以前的俄文版(Trudy Mat. Inst. Steklov, 22(1947); Math. Rov.; 10, 597, 11, 870)与中文版(Acad. Sinica, Peking, 1953; Math. Rev.; 16, 337)的改进译本. 本书处理了 Waring-Goldbach 问题及其有关的问题. Vinogradov 的三角和方法是这项研究的主要工具. 绝大多数结果都是作者的原发性结果,其中有些已成为经典结果. 在第Ⅰ章与第Ⅲ章中,作者证明了一些关于三角和的一般性质. 第Ⅱ章处理了关于除数函数 $d(n)$的一个和. 这三章中用到了 Mordell, Vander Corput 与 H. Weyl 的引理. 在第Ⅳ章中,作者用改进过的形式阐述了 Vinogradov 的基本中值公式. 众所周知这个定理给出了积分

$$\int_0^1\cdots\int_0^1|C_k(P)|^\lambda \mathrm{d}\alpha_1\cdots \mathrm{d}\alpha_k$$

的一个上界估计,其中

$$C_k(P)=\sum_{x=1}^{P}\exp(2\pi \mathrm{i}(\alpha_k x^k+\cdots+\alpha_1 x)).$$

在第Ⅴ章中,对于特殊情况 $2\leqslant k\leqslant 10$,作者给出了相对于 $\lambda=\lambda(k)$的特殊值的更精密的中值公式. 最后,作者证明了下面的定理:假定$|\alpha_r-h/q|<q^{-2}$对于 $2\leqslant r\leqslant k$, $(h,q)=1$ 及 $1\leqslant q\leqslant P^r$ 成立,则当 $P\leqslant q\leqslant P^{r-1}$时有

$$\sum_{x=1}^{P}\exp(2\pi \mathrm{i}(\alpha_k x^k+\cdots+\alpha_1 x))=O(P^{1-\frac{1}{\sigma}+\epsilon}).$$

(此处 $\sigma=\sigma(k)$为一个适当的函数,它满足:当 $k\to\infty$时,$\sigma\to 4k^2\log k$). 而当 $1\leqslant q\leqslant P$ 及 $P^{r-1}\leqslant q\leqslant P^r$ 时,则结论较弱一些. 在

这些预备知识之后，第Ⅵ章考虑了素数变数的三角和．作者证明了适用于本书中特殊问题的 Vinogradov 关于和

$$\sum_{\substack{x\leqslant P\\ x\ \mathrm{prime}\equiv xQ+t}}\exp\left(2\pi i\left(\frac{hx^k}{q}+\alpha_1x^{k-1}+\cdots+\alpha_k\right)\right)$$

的基本定理．这是证明下面堆垒素数论结果的关键步骤．本书的主要结果在第Ⅶ章中给出．它给出了不定方程 $f(p_1)+\cdots+f(p_s)=N$ 的解数 $I_s(N)$ 的渐近公式，此处 $f(x)$ 为有首项正系数 A 的 k 次整值多项式，而且没有整数 q 使 $f(x)\equiv f(0)(\bmod q)$ 对于所有整数 x 皆成立．这个结果可以看作 Waring-Goldbach 问题的推广．众所周知，该问题对应于特例 $f(x)=x^k$．对于一般情况，作者证明了下面的基本公式：

$$I_s(N)=A^{-s/k}\mathfrak{S}(N)\Gamma^s\left(\frac{1}{k}\right)\Gamma\left(\frac{s}{k}\right)^{-1}N^{\frac{s}{k}-1}/\log^sN$$
$$+O\left(N^{\frac{s}{k}-1}\frac{\log\log N}{(\log N)^{s+1}}\right),$$

此处 $\mathfrak{S}(N)$ 为所谓的奇异级数，及 s 满足

$$s\geqslant s_0=\begin{cases}2^k+1 & (1\leqslant k\leqslant 10)\\ 2k^2(2\log k+\log\log k+2.5) & (k>10).\end{cases}$$

在第Ⅷ章中，对于特例 $f(x)=x^k$，作者研究了奇异级数．他证明了下面的定理：假定 $s\geqslant 3k+1$ 及 $s\equiv N(\bmod K)$．则对于 $f(x)=x^k$ 有 $\mathfrak{S}(N)\geqslant\eta>0$（在此我们置 $K=\prod_{(p-1)|k}p^\gamma$；其中当 $p=2$ 及 $2|k$ 时，$\gamma=\theta+2$，其他情形则 $\gamma=\theta+1$；θ 适合 $p^\theta|k,p^{\theta+1}\nmid k$）．因此由此导出了下面的定理：当 $s\geqslant s_0$ 时，每一个充分大的整数 $N\equiv s(\bmod K)$ 都是 s 个素数的 k 次方幂之和．这一定理包括了一些有趣的推论；例如，每个充分大的奇数都是三个素数之和（这是熟知的 Vinogradov 定理）及每个充分大的整数 $\equiv 5(\bmod 24)$ 都是 5 个素数的平方之和．考虑到这样的问题，即寻找最小的整数 $s=H(k)$ 使每个充分大的整数 $N\equiv s(\bmod K)$ 都是 s 个素数的 k 次方幂之和．由上面结果立刻推出 $s\leqslant s_0$．在第Ⅸ章中，作者改进了 $H(k)$ 的估计．他证明了 $H(k)\leqslant 2k+2m+7$，此处 $m\sim 2k\log k$．对于小的 k，还可

以证明下面的结果：$H(4)\leqslant 15$，$H(5)\leqslant 25$，$H(6)\leqslant 37$，$H(7)\leqslant 54$，$H(8)\leqslant 74$. 此处在证明中用到了 Davenport 的一条引理. 在第Ⅹ章中，作者处理了寻找方程组(a) $\sum_{i=1}^{s} p_i^h = N_h, h=1,\cdots,k$ 的解数 $I(N_1,\cdots,N_k)$的一般问题. 当 $s\geqslant s_1\sim 6k^2\log k$ 时，他证明了 $I(N_1,\cdots,N_k)$的一个渐近公式. 他还处理了"整数可解性"与"同余式可解性"的条件. 当这两个条件同时满足时，(a)的可解性就得到保证了. 这些条件的含义将在第Ⅺ章中加以明确，其中当 $s\geqslant s_0\sim 3k^2\log k$ 时，作者证明了关于(a)可解性的一个深刻结果. 在第Ⅻ章中，作者讲述了几个相关问题. 一些更广泛的问题及经典的猜想被提到了并给出了一些有趣的结果，但未给予证明.

（见 M. Cugiani，"L. K. Hua, Additive Primzahltheorie, B. G. Teubner Verl; Leipzig, 1959"，Math. Rev.；23 A 1620. 王元译）

§2.7 数论导引

本书是一本数论入门书，适宜作为大学生与研究生的教科书，也是自学数论者的一本良好读物. 在写作风格上，本书受到了 Hardy 与 E. M. Wright 的著作"An Introduction to the Theory of Numbers, Oxford, 1938"的影响. 但书的内容涉及的范围却要大得多，也深入得多. 书中包括了作者自己的不少重要结果，如完整三角和估计，最小原根与 Tarry 问题的估计等. 由下面简单的内容介绍已不难看出书中收入了不少深刻的数论结果，特别其中有相当多优秀的结果还是本书第一次写进书里去的，如 A. Selberg 的 Λ^2 方法等.

全书共分 20 章. 第一章：整数之分解，第二章：同余式，第三章：二次剩余，第四章：多项式之性质，第五章：素数分布之概况，第六章：数论函数. 这六章均属于初等数论的基本知识，所以它与一般的初等数论书会有相当多的重复，但其中也有些内容是别的书所较少见到的. 例如第六章中关于圆内整点问题与除数问题的三

节.在这三节中,首先讲述了 Vinogradov 关于形如

$$\sum_{A\leqslant x<B}\{f(x)\}$$

的分数和的估计,此处$\{x\}$表示 x 的分数部分及$f(x)$为一个满足适当条件的函数.其次为将这一估计用于圆内整点问题,书中证明了对于任何 $\epsilon>0$ 皆有

$$A(x)=\sum_{\substack{1\leqslant n\leqslant x\\ u^2+v^2=n}}1=\pi x+O(x^{\frac{1}{3}+\epsilon}),$$

其中与 O 有关的常数依赖于ϵ.对于除数问题也有类似的结果.最后关于圆内整点问题,书中收集了 P.Erdös 与 W.H.I.Fuchs 的结果:下式不能成立:

$$A(x)=\pi x+O(x^{1/4}\log^{-\frac{1}{2}}x).$$

以后各章基本上自成体系,实际上,每一章是对一个数论领域所作的有一定深度的导论.第七章三角和及特征中讲述了完整三角和的估计.第八章与椭圆模函数有关的几个数论问题.该章讲述了整数的分拆问题,给出了 n 的分拆个数$P(n)$的对数渐近公式.第九章素数定理,该章给出了素数定理的两个证明,一个基于 A.Tauber型定理的应用,另一个为 Selberg 与 Erdös 的初等证明.本章还给出了 P.G.L.Dirichlet 关于算术级数中有无穷多个素数这条定理一个初等的证明.第十章渐近法与连分数.该章讲述了一致分布的概念与 Weyl 的判别条件.第十一章不定方程.第十二章二元二次型.该章讲述了 Siegel 定理,即当 $d\to-\infty$时$\log h(d)$的渐近式与当 $d\to\infty$时,$\log(h(d)\log\epsilon)$的渐近式,此处$h(d)$为判别式为 d 的原型类数,而 ϵ 为 J.Pell 氏方程 $x^2-dy^2=4$ 的最小解的$\frac{1}{2}$倍.第十三章模变换.第十四章整数矩阵及其应用,该章给出了华罗庚与 I.Reiner 定理;即正模方阵群 $\mathfrak{M}_n$ 可以由两个方阵生成,本章还将自然数的一些基本概念与性质推广到整数方阵,例如,素方阵、复合方阵、方阵的最大公约与最小公倍等,第十五章 p-adic数.第十六章代数数论介绍.第十七章代数数与超越数.本

章给出了 K.F.Roth 关于代数数的有理逼近定理的证明，即当 ξ 为一个非有理数之代数数时，只有有限多组整数 $(h,q)(q>0)$ 适合 $\left|\xi-\frac{h}{q}\right|<q^{-2-\varepsilon}(\varepsilon>0)$. 本章还给了 A. O. Gelfond 与 T. Schneider 关于 D.Hilbert 第七问题的证明，即若 α,β 为代数数，其中 $\alpha\neq0,1$，而 β 非有理数，则 α^β 为超越数. 第十八章 Waring 问题及 Prouhet-Tarry 问题. 本章将给出作者关于 Prouhet-Tarry 问题的一个结果：命 $M(k)$ 表示最小的整数 s 使 $x_i,y_i(1\leqslant i\leqslant s)$ 满足

$$\sum_{i=1}^{s}x_i^h=\sum_{i=1}^{s}y_i^h(1\leqslant h\leqslant k),$$

$$\sum_{i=1}^{s}x_i^{k+1}\neq\sum_{i=1}^{s}y_i^{k+1}.$$

则 $M(k)\sim k^2\log k$. 第十九章 Schnirelmann 密率. 本章将用 L. G. Schnirelmann 密率方法来证明 Schnirelmann-Goldbach 定理，与 Yu，V. Linnik 给出的关于 Waring-Hilbert 定理的证明. 本章中还讲述了 Selberg 的 Λ^2 筛法，第二十章为数的几何.

在本书的序言中，作者特别指出几点他对数论研究与教学的看法. 简要地说：首先必须指出数论不是一个孤立的学科，它与数学的其他分支是密切相关的. 其次，必须注意数学中抽象概念的背景，数论提供了不少这样的背景. 最后是做研究应该把握的深度问题. 华罗庚的这些看法是值得重视的.

1940 年，作者在昆明西南联合大学讲授数论课，写了八九万字作为讲义. 后来在美国执教时，又作了一点补充. 华罗庚真正执笔写这本书，还是 1950 年他回国任中国科学院数学研究所所长的时候. 从 1953 年开始，他领导了一个“数论导引”讨论班，由华罗庚主讲，他的讲义交给数论组的成员作修改与补足. 最后由他定稿，于 1957 年，由科学出版社出版. 1975 年第四次印刷时，王元为本书写了一个附录，对本书第一版中所论及的著名数论问题的进展情况作了评述. 1982 年，在本书出版了四分之一个世纪之后，由 Springer 出版社出版了该书的英文版. 译者

为 P. Shiu 博士. Shiu 还与王元一起，将王元写的附录修改补充后分散附于各章之末. 1995 年，中文版再版时，潘承彪又对附录作了进一步补充.

§2.8 评论之六（马勒）

这是一本有价值与重要的数论教科书，略为从 Hardy 与 Wright 的线索开始(见 An Introduction to the Theory of Numbers, Oxford,1954,Math. Rev. ;16,673),但却远远地超过了它的范围，本书是用非常清楚简练的中文书写而成的，所以，它也可以作为一本很好的数学入门书. 书末附有 12 页的中-英-俄文名词对照，这对于初学者来说，将会有特殊的帮助. 书中包有很多最新的结果；有用的表格，如二次域表；以及为学生安排的习题. 因此这本书必将引导中国学生在数论领域里作出更多的工作.

内容：1. 整数之分解. 2. 同余式. 3. 二次剩余. 4. 多项式之性质. 5. 素数分布之概况. 6. 数论函数. 7. 三角和及特征. 8. 与椭圆模函数有关的几个数论问题. 9. 素数定理(Ikehara 与 Selberg 的证明及 Dirichlet 定理). 10. 渐近法与连分数(一致分布 mod 1). 11. 不定方程. 12. 二元二次型(Siegel 关于类数定理). 13. 模变换(二次型的几何理论). 14. 整数矩阵及其应用. 15. p-adic 数(赋值理论). 16. 代数数论介绍. 17. 代数数与超越数(包括 Roth, Hermite, Lindemann, Gelfond-Schneider 定理). 18. Waring 问题及 Prouhet-Tarry 问题. 19. Schnirelmann 密率. 20. 数的几何.

对于本书丰富的内容，仅作上述简短的列举是完全欠公平的.

(见 K. Mahler, "Su Lang Tao Ying (Introduction to Number Theory) Sci. Publ. Co; Peking, 1957", Math. Rev. ;20,829,1959, 王元译).

§2.9 评论之七（革里夫斯）

华罗庚的这本书类似于 Hardy 与 Wright 的著名教科书，它介绍了数论的很多方面，读者的背景为大学本科学生程度．本书大部分的章都是彼此独立的，其实很多章本身就构成了数论一个分支的导引．另一方面，本书的范围比 Hardy 与 Wright 的书拓广了很多，这不仅表现在书更加厚了一些，也表现在对材料的处理更加浓缩了．我们可以设想，在很多情况下，大学生会到一些较早出版的教科书中去寻找本书中某些结果的证明的．必须指出，读者不能从本书中得到背景材料的叙述，从而使他们能够将许多（极为清晰地证明了的）结果放在它们的历史景观中来考察．另一方面，对于较熟习数论的读者来说，他们会对本书收集了丰富的经典结果而感到珍贵的．

如果要叙述本书的全部内容，则必须将有六页长的目录的主要部分加以复述，所以评论者只选择了其中的一部分加以介绍．数论函数这一章讲述了用 Vinogradov 关于某些函数分数和的估计方法给出的 Sierpinski 与 Voronoi 关于圆内整点问题与除数问题经典结果的证明．本章同时给出了 Erdös 与 Fuchs 关于 Sierpinski 型定理著名的极限定理，接着一章为三角和与特征，其中包括了关于特征和的 Polya-Vinogradov 不等式的证明，及它在模素数的最小二次非剩余与最小原根问题上的应用．下一章为椭圆模函数的应用，其中包含了分拆函数的对数渐近公式的证明．再下一章包含了素数定理的两个证明：一个为 Wiener-Ikehara 方法的应用，另一个为基于 Selberg 公式的初等证明，本章也包括了 Dirichlet 关于算术级数中有无穷多个素数的定理证明．再一章为渐近法与连分数，其中讨论了 Weyl 关于一致分布的判别法．关于超越数这一章之末，作者给出了 Gelfond-Schneider 定理的证明（特别，读者可以由此知道为什么 $2^{\sqrt{2}}$ 是一个超越数），在讲到代数数有理逼近的 Roth 定理时，本书解释了为什么将中文版中该

定理的证明在此略去了．在Schnirelmann密率这一章中，不仅包括了Schnirelmann关于表整数为素数之和的结果——这里用到了Selberg上界筛法——而且用同样的框架处理了Waring问题的Hilbert存在性定理．

本书还包括代数数论、p-adic数、不定方程、数的几何、模变换、整数矩阵与二元二次型（包有Siegel的类数定理）等章，评论者在此并未列出所有章的名称．

（见G. Greaves,"Introduction to Number Theory, Translated from Chinese by P. Shiu, Springer, 1982", Proc. Lon. Math. Soc.; 1982,272. 王元译）

§2.10 评论之八（卡塞尔斯）

数论是很多数学分支的发源地，按现在的分类，数论则属于理论与问题不纯正的混合体，数论研究最基本的（因而也是最艰难的）数学对象——自然数．这构成了它的一般性质．当我还是一个孩子——中学生的时候，我就被Hardy与Wright的书"Introduction to the Theory of Numbers"的第一版（1938）引入了数论领域．我总是把这本书看作是进入数论众多领域唯一的动力（该书的第五版已于去年问世了）．当华罗庚的书问世时，我的一二个熟朋友欢呼着，他们可以读到足以与Hardy与Wright的书相匹配的书籍了．这本书一直放在我的书架上已达四分之一个世纪之久，而未能去阅读它．只有到了现在，当这本很好的英文翻译本出版时，我才知道它到底包括了一些什么．

这两本书的确是相似类型的书：各章介绍了广大数论领域的一些主题，不可避免地有相当多内容互相重复了．但也有很多相异之处．例如，华罗庚的书中讲述了许多二次型的工作，有一些章讲述了矩阵的算术，模群的几何及Schnirelmann密率（附有在Waring问题与素数和表示问题上的应用）——一个相异的领域，但却又是很相适宜的．

本书的叙述是非常清晰的，并且间或还有一些例子．这正是 Hardy 与 Wright 的书所缺乏的，这确实是一个优点．因为数论毕竟不是具有众多观众的体育运动（有一个属于误导的例子，在第 290 页，读者被要求去证明方程 $2x^4-y^4=z^4$ 有无穷多个解，但需除 $y=\pm x$ 外．除非到了后面，也许作者不会有证明的想法）．书中的文献有些零乱，其中有些很完善，而另一些则不然．与 Hardy 与 Wright 的书相比，这就是一个明显的缺点．这本书的一大优点为每一章的后面有一个注记，交待了该章所论及的问题的历史与现状．此处在两三个地方，作者指出了一些结果，他们在中国的出现早于西方(例如 $x^2+y^2=z^2$ 的参数解)．中国近代数学家的工作，则仅适当地被提到了，但并未特别地加以强调．

将来，如果要求我推荐一本数论的入门书，我仍将首先提到 Hardy 与 Wright 的书——但第二句话，我就会说到华罗庚的书的．

我还希望 Springer 的先生们不要介意我指出华罗庚书的中文版的售价只有 4.6 元（不到 6 马克），这真是一个对语言学勇气的鼓励啊．

（见 J. W. S. Cassels, "L. K. Hua, Introduction to Number Theory (Translated by P. Shiu), Springer, 1982" The math., Intelligencer, 2, 1983, 57. 王元译）

§2.11 评论之九（爱尤伯）

这是 1957 年首先由中文出版的书的英译本（中文版已经由 K. Mabler 在 Math. Rev.；上面发表过评论）．这次翻译时，很多章末都加上了注记，对该章结果的近况作了叙述．本书中的注记是王元作出的．本书的译者是 Peter Shiu.

在今天，数论的兴趣与活力仍然可以与数学的任何领域相比拟，尽管一些结果已有上百年（甚至上千年）的历史，而且一些

结果很孤立与特殊，但他们的兴趣仍然是广泛与持久的.

我们只要提到下面的事情即是：Euclid 发现的，例如完全数，唯一因子分解定理与素数分布；Babyloniaus 研究的课题——二次型表示整数；丢番图方程的求解问题已失去了历史的最早记载.

我们如何来估量已经持续了多个世纪的数论活力呢？这是一个很难回答的问题．有些人试图用近似神学的观点来描述它．至少，Kronecker 认为数论在思想史上是占有特殊地位的.

不管是什么哲学的原因，这总是事实，即多少年来不断地重复出现在数论与数学的其他领域之间的互相催化作用；有时借用，有时给予，从而使双方都丰富起来了．作为一个例子，考虑构造正多角形的问题，Gauss 用“Gauss 和”解决了这个几何问题．“Gauss 和”的性质依赖于一些数论的结果，例如原根的存在性．在这样的情况下，研究 Gauss 和与其变体就成为数论的一部分了．反之，数论问题也会引起其他领域中新发展的诞生．作为一个例子，丢番图方程的研究给予了代数几何以重要的刺激．更有一些情况，数论的追求甚至导致了新领域的产生．例如，H. Bohr 在研究 Riemann ζ 函数的时候，使他得到了殆周期函数的概念.（有人会问，ζ 函数是否真是数论的一部分?）

有些例子表示，我们没有明显的理由来说明某些数学发展是属于数论方面的．例如，很难理解为什么 π 的超越性应该是数论的一个定理？事实上，A. Weil 在他的一篇数论文章中提出了疑问：为什么解析数论定然是数论？我们最好引用“Alice…”，“当我们用一个字时，正如我所选择的那样，其含义——既不多也不少”.

除了在其他数学领域中的影响之外，数论还有各种各样的“应用”，其中有些甚至是预料之外的．华罗庚举了一些例子；第一个是 Adleman，Rivest 与 Shamir 的密钥方法，其密码需要大整数的因子分解．其次是 Rosser，Schoenfeld 与 Yohe 在计算 ζ 函数零点时发现的电脑中的逻辑错误．我们还可以增加一些应用的

例子：将有限域用于密码理论及华罗庚自己作过贡献的将丢番图逼近用于近似计算重积分问题.

华罗庚赞成我们所陈述的观点. 他写了一本概括很全面的书，这本书很厚——共二十章，575 页. 但读者也不必望而却步，因为许多章都可以彼此独立地去阅读.

除经典材料外，书中包含了很多数论分支. 我们将介绍其中的两个. 在此，数论问题影响了数学其他领域的发展.

第一个是关于三角和（有时称为指数和）问题. 这种和在数论与其他领域的众多应用方面起着决定性作用.

命 $f(x)$ 为定义于某实域上的一个实值函数及 A 为任意实数>0，具有形式

$$E = E(f,y,A) = \sum_{0\leqslant n\leqslant A} e^{2\pi i f(n)y}$$

的和称为指数和，此处 n 过整数值，显然有 $E=O(A)$，但是若 $f(x)$的值分布有某种正规性，则我们可以期望 E 中一些项相互之间抵消了. 因此中心问题为决定应该加于 f 及 y 的条件，使三角和各项相抵消后产生估计 $E=o(A)$，或者更精确些，问三角和“小”于 A 到什么程度？关于这个基本问题有许多工作. 例如当 p 是一个素数，$A=p$，$y=\frac{1}{p}$及 $f(x)$为 $Z[x]$上的本原多项式，则这一和与一个几何问题相关；用有限域上曲线的 Riemann 猜想，A. Weil 证明了下面惊人的结果：

$$E = O(\sqrt{p}).$$

这样深刻的结果是不能期望（或者根本不可能）普遍地成立的. 但不管怎样，寻找 E 的好估计刺激了数学其他领域的工作.

运用适当的估计，华罗庚在他的书中证明了如下事实：若 $n(p)$表示模 p 的最小二次非剩余，则

$$n(p) < p^{\frac{1}{2\sqrt{e}}}\log^2 p.$$

我们加一个注记：“小”的二次非剩余的存在性在一个数的因子分解所需的计算量估计问题上起着作用.

第二个例子来自堆垒数论，可以公正地说，它激发了模形式与其有关形式的理论发展.

假定我们要决定将整数 $n>0$ 表示为形式 $n=a_1+\cdots+a_s$ 的表法个数 $r(n)$，此处 a_i 属于集合 $A_i\in Z$. 易知若 $f_i(x)=\sum_{a_i\in A_i}x^{a_i}$，则

$$F(x)=\sum_{n=0}^{\infty}r(n)x^n=\prod_i f_i(x)(r(0)=1).$$

若函数 $f_i(x)$ 有较好的性质，则我们由此得出 $r(n)$ 的性质. Euler 给出的 $A_i=\{0,i,2i,\cdots,mi,\cdots\}$ 及 s 无限可能是最古老的例子，这时

$$f_i(x)=(1-x^i)^{-1},\quad F(x)=\prod_{i=1}^{\infty}(1-x^i)^{-1}.$$

于是 $r(n)=p(n)=n$ 的无限制分拆个数，函数 $F(x)$ 有模性质：若 $x=e(2\pi i\tau)$，则变换

$$\tau\rightarrow\frac{a\tau+b}{c\tau+d},a,b,c,d\in Z,ad-bc=1$$

以特别好的方式变换 $F(x)$，这种变换构成了模群 G，函数在 G 的作用之下有好的性质，或 G 的子群在数论中起到重要的作用. 对它们的研究构成了一个非常活跃的研究领域. 最近发现了模形式与偶阶单群的特征之间的联系. 总之，利用 $F(x)$ 的模性质，华罗庚给出了 Hardy 与 Ramanujan 一个定理的证明，即

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\log p(n)}{\sqrt{n}}=\sqrt{\frac{2\pi}{3}}$$

很多读者知道这是 Hardy 与 Ramanujan 关于 $p(n)$ 渐近公式的一个弱形式. 这一问题已被 Rademacher 完全解决了，即将 $p(n)$ 表示为一个收敛得很快的级数.

若 $A_i=\{0,1,4,\cdots,m^2,\cdots\}$，则

$$\sum_{n=1}^{\infty}r_s(n)x^n=\Big(\sum_{m=-\infty}^{\infty}x^{m^2}\Big)^s=f(x)^s.$$

于是 $r_s(n)$ 等于将 n 表示为 s 个平方和的表法个数. 函数

$f(e(2\pi i\tau))$称为 theta 函数，Jacobi 研究了它的模性质并研究了 $s=4$的情况. 在本书中，华罗庚分析了 $s=3$ 的情况，并给出了 $r_3(n)$明确的表达式及其详细的推导.

这两个例子说明了数论与其他数学领域的紧密关系. 这本书最大的特点是它的经济风格，使它包括了众多的领域与结果. 本书能够达到这一目的的部分原因是它在陈述与证明结果时，往往避免了最大的一般性. 可以肯定地说，一些定理的证明是被留作了习题的，但不幸地是，本书中作为补充的习题实在太少了.

作为这个特征，我们特别提出代数数论这一章作为例子，在仅仅只有 50 页的篇幅里，作者从这一主题非常原始处讲起，经过理想，类数等，最后终止于对 Mersenne 素数与丢番图方程的应用，清清楚楚地讲完了.

对于其他章来说，多多少少也像这一章一样，有兴趣的读者可以在极少预备知识的情况下来接触其内容. 本书所用的数学语言是经典的，从而读者不需要具备一本厚的数学辞典. 另一方面，读者将会从本书中得到很多有相当深度的美丽定理而感到满足.

Gauss 在给 Soplcie Germain 的一封信中谈到了数论，他说："除了那些有勇气钻研到深处的人，这个至高无上的学科中使人心醉的迷人之处是不会暴露出来的"，这本书给我们提供了一个非常好的钻研工具.

(见 R. G. Ayoub, "L. K. Hua, Introduction to Number Theory, Springer, 1982", Bull. Amer. Math. Soc.; 2, 1984, 333—337. 王元译)

§2.12 评论之十（罗伯尔斯）

数论是最古老的一个数学领域，也是被大批最有兴趣者与最伟大的数学家工作过的一个领域. 其中一些未解决的问题，甚至被一些对数论一无所知的人所熟知：是否存在一个奇数，它等于其因子之和之半（奇完全数问题）？是否有整数 $n>2$，使一个整

数的 n 次方幂等于两个整数的 n 次方幂之和（费马猜想）？事实上，这个学科迷人的部分原因就在这里．关于这一点，所有时代最伟大的数学家之一 Carl Friedrich Gauss 曾经说过：

它的理论特别迷人之处的大部分皆可以由其属性推导出来．重要命题的属性有其简单性，常常由归纳法就可以简单地发现它，但同时又具有极深刻的特点，使我们如果不经过无数次的努力，是不能发现它们的证明的．已经成为近代经典数论名著之一的 G. H. Hardy 与 E. M. Wright 的"An Introduction to Number Theory"第一版的序言中说："……这个分支是那样的迷人，我们完全不可能失败，除非过分地不胜任，将它弄得不清不楚"．

任何庞大的与很好发展过的科学领域都不会是一个单一的学科，它总是许多学科的聚合体．例如数论的那些分支称之为初等数论，代数数论与解析数论的界线，对于非专家来说，似乎是细微的，而并不会被认为是同一学科的各个部分．事实上，对于数学家自身来说，既使对于数论学家来说，"数论"这个词也并不总是具有相似的含义的．一些设想数论为它的第一个教程的基本内容：它包含诸如素数论初步、同余式论、二次互逆定律、二次型与连分数等．其他人可能设想为 Riemann ζ 函数与素数分布．更有人可能设想为下面理论的一种或多种：超越性理论、椭圆曲线论、模形式、阿德尔（Adele）群表示、Fermat 大定理的连续研究，Riemann 猜想或算术代数几何．

不仅是那些处于黑暗中我们不熟习的数学家，他们不知道数论的含义，人们甚至不敢猜想同样书名的现代书的内容．证明如下：在 W. Sierpinski 的书"Elementary Theory of Numbers"中，作者说，初等数论是数论的一部分，它不同于数论的其他部分，"它不需要使用极限"，而 A. Weil 的"Basic Number Theory"中（在四页之长的预备知识与记号的接近开端处）有这样的话："在第Ⅰ章已经……用到局部紧致交换群的性质，包括 Haar 测度的存在性与唯一性……"．

本文所要讲的两本书也是这样现象的例子——虽然不像那么

极端．它们的题目相似，但内容完全不同．

对于许多领域，只要比第一个课程深入一些，这个领域就分成了许多研究分支，每个分支均包含一些著名的问题与猜想．

例如，在 19 世纪，解析数论中最著名的猜想之一——不超过 x 的素数个数渐近地等于 $x/\log x$（素数定理）——被着力地研究着，经过大量工作之后，才在 1896 年被证明了．那一年，由法国数学家 Jacques Hadamard 与比利时数学家 Ch.-J. de la Vallee Poussin 独立地各自给出了一个证明，每一个证明中都深入地运用了复变数函数论．在本世纪的前半叶，往往以证明中用到复变函数论的多少来衡量解析数论定理的“深度”．即使在现代，素数定理在研究中仍具有重要地位．一直到 1948 年，P. Erdös 与 Atle Selberg 才成功地给予了素数定理一个“初等”证明（即不用复变函数论的证明）．

在代数方面，一个被称为代数数论完整的领域，实际上可以看作是受到 Fermat 猜想的刺激而生成的．还有其他特殊的猜想与定理，使围绕着它们有许多工作聚结着的例子；我们可以引征：由 Gauss 开始，经过 Artin 的工作，与 Langlands 的最近工作，关于互逆定理与类域论的工作；经过半个世纪的努力，最后由 Roth 于 1955 年证明的定理：对于 $\delta>0$ 及任何无理代数数 ξ，只有有限多个有理数 p/q 使 $|\xi-p/q|<q^{-2-\delta}$；1934 年，Gelfond-Schneider 证明了 David Hilbert 在 1900 年建议的 23 个问题中的一个，即若 α，β 为代数数（$\alpha\neq0$ 或 1，β 为无理数），则 α^{β} 为超越数．每一个这种问题在 20 世纪的数论中都具有重要地位．继续说，Goldbach 于 1742 年提出的猜想：所有大于 2 的偶数都是两个素数之和，经过了 200 年的紧张研究、只有到近代，才由 Schnirelmann，Vinogradov 与陈景润对这个问题作出了真正的贡献．

最后，我们最重要的，未经证明的著名猜想——Riemann 猜想．19 世纪，Riemann 研究素数分布问题时，研究了所谓 Riemann ζ 函数

$$\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$$

的性质，其中 s 为复数，Riemann 猜测这个函数在区域 $0\leqslant \mathrm{Re}s\leqslant 1$ 中的零点都位于直线 $\mathrm{Re}s=\frac{1}{2}$ 上面．由这一猜想可以推出许许多多深刻而迷人的结论．一个时期曾经流传着下面的传说：一个非常著名的数学家写了一本书，他的书的基础是 Riemann 猜想的正确性，而且他殷切地期待着 Riemann 猜想的一个证明，使他能将证明写进他的书里去．不管怎样，原始的猜想被扩充与修改为不同形式（尽管不是原来的）之后，它们被 A. Weil，P. Deligue 与其他人证明了．由此导出一系列结果来了．例如，所谓代数数域的"广义 Riemann 猜想"可以推出尚未被证明的 E. Artin 猜想，即每一个非平方数 a，$a\neq\pm 1$，均有无穷多个素数 p 使 a 为模 p 的原根．用另一个 Riemann 猜想的变体可以推出关于 $k(x)$ 上的 Artin 猜想的类似．这些问题继续成为许多研究的交点．

上面的例子尽管还不是美丽的统一理论的所有部分，但它们都是数论领域里的里程碑．

我们评论的两本书，各处理了数论的一些方面，它们给我们举的例子可以证明．作了适当的选择，这两本书都可以作为第一个教程的教课书．同时每本书又都比这一目的前进了很大一步．华罗庚的书几乎处理了所有上述的领域，显示了该书的宽广范围，有些是属于该领域完全不同的历史性质．当然是强调解析数论的陈述而近世代数则较少地用到．我们可以在华罗庚的书的许多地方进行深挖，而不必从头读到尾．

另一方面，Ireland 与 Rosen 的书则不然，他们企图统一处理大部分从代数数论中来的较窄的一些课题．所以在他们的表述中，相当多地用到了抽象代数——特别是书的后面 2/3，处理了 Riemann ζ 函数和椭圆曲线；互逆定律；与有限域上方程求解中各种问题的内在联系．这本书不像华罗庚的书，他们的写作是希

望让一个读者对书中所提及的课题有一个统一处理的认识. 它是难于随机地深挖的.

这两本书都企图用每一章的注记使读者了解到最新的发展，同时两本书的材料都很现代化，其选材属于近代的研究论文. 现在看来，Ireland 与 Rosen 的书可能更时新一些，这是由于有希望将在那里讨论的，看来不同的数论分支会得到一个广泛统一的处理. 读这本书当然要求读者比念华罗庚的书有更好的代数学背景. 但另一方面，华罗庚的书比 Ireland 与 Rosen 的书在材料的范围的广阔方面有着更全面的视野. 这对于有兴趣于得到近代数论全范围视野的读者来说，也许更加适宜.

不多年前，很少有数论书适合当教本而令人发愁. 有时亦非这样，但不管怎样，这两本书都给出别的书所未见过的丰富材料，所以都是令人欢迎的教本与文献.

(见 J. B. Roberts,"Introduction to Number Theory, By Loo-Keng Hua, Springer, 1982; A Classical Introduction to Modern Number Theory, By Kenneth Ireland and Michael Rosen, Springer, GTM, 84, 1982", Math. Monthly, 1984, 319—321. 王元译)

§2.13 Goldbach 猜想

早在 1953 年，数学研究所建立数论组的时候，华罗庚就决定以 Goldbach 猜想作为数论组讨论班的中心课题. 他的着眼点在于 Goldbach 猜想跟解析数论中几乎所有重要的方法都有联系. 例如圆法、指数和估计方法、筛法、L 函数零点分布与素数分布理论等. 从而以 Goldbach 猜想为主题来学习，就可以学会解析数论中几乎所有重要的方法. 华罗庚的下一步棋为让数论组的年轻人学一些代数数论知识，这样他们就可以将解析数论中的一些结果推广到代数数域中去. 至于 Goldbach 猜想本身，华罗庚并没有预料到会有人作出贡献. 华罗庚的这一决策，经过若干年后再看，的确是非常正确的. 数论组的年轻人，经过讨论班的训

练，都成为我国数论界的骨干，或转入其他领域，而成为我国在该领域中的领头人．一些人甚至作出了有国际影响的工作．这可以说是华罗庚从 50 年代回国后，在培养年轻数学家方面所取得的最成功之举．

所谓 Goldbach 猜想是 1742 年 Goldbach 写信给 Euler 时提出来的关于整数表为素数之和的问题，即每个整数 >2 都是两个素数之和．Euler 在回复 Goldbach 的信中，他表示相信这一猜想，但不能证明它．

由这一猜想的成立，立刻可以推出每个奇数 >5 都是三个素数之和．1937 年，Vinogradov 基于圆法及他自己关于素数变数三角和的天才估计，证明了每个充分大的奇数都是三个素数之和．剩下要证明的就是偶数的 Goldbach 猜想了．

研究偶数 Goldbach 猜想的重要方法为筛法．筛法肇源于公元前 250 年的 Eratosthenes 筛法，即普通制造素数表的方法．直至 1919 年，V．Brun 才对这一方法作出了重大改进，并用于 Goldbach 猜想．他证明了：每个充大的偶数都是两个素因子个数均不超过 9 的整数之和．为简单计，我们将这一结果记为 (9，9)．类似地，我们可以定义 (a, b)．Goldbach 猜想本质上就是要证明 (1，1)．

Brun 的方法与他的结果被不少数学家加以改进．筛法的另一个重大改进是 Selberg 作出的．至 1954 年，Goldbach 猜想的最好结果是属于 A．A．Buchstab 与 P．Kuhn 的，他们分别证明了：

$$(4,4)(\text{Buchstab}),(a,b)(a+b\leqslant 6.\ \text{Kuhn})$$

结合 Brun，Selberg，Buchstab 与 Kuhn 的方法，王元分别将上述结果改进为：

$$(3,4)(1956),(2,3)(1957)$$

Goldbach 猜想研究的另一重大突破为 A．Renyi 作出的，他利用 Linnik 的大筛法于 1947 年证明了 $(1, c)$，此处 c 是一个常数．

1962 年，潘承洞证明了一条关于算术级数的中值定理并首次定出 $c=5$，1963 年他又与 M. B. Barban 独立地证明了

$$(1,4)$$

1965 年，E. Bombieri 与 A. I. Vinogradov 改进了潘承洞与 Barban 的中值公式，从而证明了

$$(1,3)$$

1966 年，陈景润证明了

$$(1,2)$$

国际上称这一结果为“陈氏定理”. 陈景润关于（1，2）的证明方法也是独创的，国际上称为“转换原理”. 陈氏定理已成为本世纪最重要的数论结果之一（见§2.12）.

中国在 Goldbach 猜想方面的成就无疑应该部分地归功于华罗庚的眼光与倡导.

第三章　代数与几何

§3.1　体论与半自同构定理

命 R 为一个有乘法单位的环，且每一个非零元素都是单位，即关于乘法有逆元素．则称 R 为可除环．交换的可除环称为域，非交换的可除环则称为体(Skew field)．

域是最常见的代数结构之一，如有理数域、实数域、复数域、代数数域与有限域等．体的例子如四元素体．

命 K 为一个体．若有一个由 K 至 K 的一一映射 $\sigma: a \to a^\sigma$ 满足

$$(a+b)^\sigma = a^\sigma + b^\sigma \tag{1}$$

$$(aba)^\sigma = a^\sigma b^\sigma a^\sigma \tag{2}$$

$$1^\sigma = 1, \tag{3}$$

则称 σ 为半自同构．半自同构的例子有自同构，即 σ 满足 $(ab)^\sigma = a^\sigma b^\sigma$ 与反自同构 $(ab)^\sigma = b^\sigma a^\sigma$．有一个著名的问题：是否存在自同构与反自同构以外的半自同构？这一问题是华罗庚用非常简单的方法解决的．他证明了：

定理 3.1　每一个半自同构或为自同构或为反自同构．

证　1)在(2)中置 $b = a^{-1}$．则得

$$(a^{-1})^\sigma = (a^\sigma)^{-1}. \tag{4}$$

在(2)中将 a 换为 $a+b$，将 b 换为 1，则由(3)可知

$$\begin{aligned}&(a^2+ab+ba+b^2)^\sigma\\ =\ &((a+b)(a+b))^\sigma = (a+b)^\sigma(a+b)^\sigma\\ =\ &(a^\sigma+b^\sigma)(a^\sigma+b^\sigma).\end{aligned}$$

即得

$$(ab)^\sigma + (ba)^\sigma = a^\sigma b^\sigma + b^\sigma a^\sigma. \tag{5}$$

由(2)与(4)得

$$\begin{aligned}(ba)^\sigma &= (ab(ab)^{-1}ba)^\sigma \\ &= a^\sigma(b(ab)^{-1}b)^\sigma a^\sigma \\ &= a^\sigma b^\sigma(ab)^{\sigma-1}b^\sigma a^\sigma.\end{aligned} \tag{6}$$

将(6)代人(5)得

$$(ab)^\sigma + a^\sigma b^\sigma(ab)^{\sigma-1}b^\sigma a^\sigma = a^\sigma b^\sigma + b^\sigma a^\sigma,$$

即

$$((ab)^\sigma - a^\sigma b^\sigma)(1-(ab)^{\sigma-1}b^\sigma a^\sigma) = 0. \tag{7}$$

于是

$$(ab)^\sigma = \begin{cases} a^\sigma b^\sigma & \text{或} \\ b^\sigma a^\sigma. \end{cases} \tag{8}$$

2)假定有一对 a,b 满足

$$(ab)^\sigma = b^\sigma a^\sigma \neq a^\sigma b^\sigma. \tag{9}$$

今往证明对于任何 c 皆有

$$(ac)^\sigma = c^\sigma a^\sigma. \tag{10}$$

否则由(8)可知

$$(ac)^\sigma = a^\sigma c^\sigma \neq c^\sigma a^\sigma.$$

由(1),(9)得

$$\begin{aligned}a^\sigma c^\sigma + b^\sigma a^\sigma &= (ac)^\sigma + (ab)^\sigma \\ &= (a(b+c))^\sigma = \begin{cases} a^\sigma(b^\sigma + c^\sigma) \text{ 或} \\ (b^\sigma + c^\sigma)a^\sigma. \end{cases}\end{aligned}$$

这两种结论均不能成立,所以(10)成立.同样可证,对于任何 d 皆有

$$(db)^\sigma = b^\sigma d^\sigma. \tag{11}$$

现在来证明,对于任何 x,y 皆有

$$(yx)^\sigma = x^\sigma y^\sigma.$$

假若不然,则由(8)可知

$$(yx)^\sigma = y^\sigma x^\sigma (\neq x^\sigma y^\sigma). \tag{12}$$

于是可以类似地证明对于任何 e,f 皆有

$$(ye)^\sigma = y^\sigma e^\sigma \tag{13}$$

与

$$(fx)^\sigma = f^\sigma x^\sigma. \tag{14}$$

由于

$$\begin{aligned} & b^\sigma a^\sigma + (ax)^\sigma + (yb)^\sigma + y^\sigma x^\sigma \\ = & ((a+y)(b+x))^\sigma = \begin{cases} (a^\sigma + y^\sigma)(b^\sigma + x^\sigma) \text{ 或} \\ (b^\sigma + x^\sigma)(a^\sigma + y^\sigma), \end{cases} \end{aligned}$$

这两种可能分别与(9),(12)相矛盾,定理证完.

G. Ancochea 与 I. Kaplansky 只能在某些限制下来处理半自同构问题.前者对特征$\neq 2$的域上的简单代数建立了对应的定理,后者则将定理推广到任何域上的半单代数.由于他们的方法植根于线性代数的构造理论,所以都不能推广到最一般的情况.

由定理 3.1 可以得到体上直线的射影几何基本定理.

定理 3.2 任何将特征$\neq 2$的体上的射影直线映射到自身的一一变换,若保持调和关系不变,则必为自同构或反自同构诱导出来的半线性变换.

过去 Ancochea 只对特征$\neq 2$的四元代数,然后对可除代数建立了相应于定理 3.2 的结论.对于一般情况仍无能为力.

华罗庚关于体论的另一个结果是:

定理 3.3 如果一个体不是域,则它的乘法群不是亚阿贝尔群(Meta Abelian group).

华罗庚给了下面重要定理一个简单证明:

定理 3.4 一个体的任何真正规子体均包含在它的中心之中.

以前 H. Cartan 在证明上述定理时,需假定体与其中心之秩为有限的,且证明十分复杂,定理 3.3 在文献中称为 Cartan-Brauer-Hua 定理.

华罗庚关于定理 3.3 的证明非常简单,只依赖于一个关于体的几乎是显然的恒等式:

$$a = (b^{-1} - (a-1)^{-1} b^{-1} (a-1))$$

$$(a^{-1}b^{-1}a-(a-1)^{-1}b^{-1}(a-1))^{-1}.$$

§3.2 矩阵几何学

在矩阵几何中，空间的点是某类矩阵，例如同样大小的长方矩阵，对称矩阵，斜对称矩阵或 C. Hermite 矩阵等．然后矩阵空间中有一个运动群．问题在于如何用尽可能少的几何不变量来刻画这个运动群．华罗庚先研究了矩阵元素为实数与复数的情况，以后华罗庚又将他的结果推广到基域不可交换的情况，并发现"粘切"这一概念即足以刻画空间的运动群．例如他证明了：

定理 3.3 假定 $1<n\leqslant m$．则从体 K 上的 $n\times m$ 矩阵到自身的一一映射保持粘切者(如果矩阵 $M-N$ 的秩为 1，则称 M 与 N 粘切)，必为以下形式：

$$Z_1=PZ^{\sigma}Q+R,$$

其 $P=P^{(n)}$ 与 $Q=Q^{(m)}$ 分别为 $n\times n$ 与 $m\times m$ 的可逆方阵，R 为 $n\times m$ 矩阵，而 σ 为 K 的一个自同构，当 $m=n$ 时，则还要添上

$$Z_1=PZ'^{\tau}Q+R,$$

其中 τ 是 K 的反自同构．

§3.3 典型群

华罗庚关于典型群的工作着眼于低维问题及矩阵的直接计算．我们征引他的文章："Supplement to the paper of Dieudonne on the automorphisms of classical groups, Memoirs AMS, 2, 1951, 96—112"的前言：

在以前的一篇文章中，作者决定了特征 $\neq 2$ 的域 K 上辛群 $SP_n(K)$ 的自同构群．(所谓辛群即适合 $TFT'=F$ 的 K 上 $2n\times 2n$ 矩阵 T 的全体，其中 $F=\begin{pmatrix}0 & I_n\\ I_n & 0\end{pmatrix}$，$I_n$ 为 $n\times n$ 单位方阵)．这一方法可以用来处理一般线性群 $GL_n(K)$(即 K 上可逆的 $n\times n$

方阵的全体).再经过复杂的改进,还可以用于具有指标 $V\geqslant 1$ 的二次型 f 的正交群 $O_n(K,f)$,J. Dieudonne 教授用完全不同的方法,完整地给出了典型群的自同构群,但有一些例外(见本文的最后一节).本文的目的则在于解决他遗留的一些问题.

Dieudonne 的文章中提出的第一个困难问题是决定 $GL_2(K)$ 的自同构群,其中 K 是一个体.对于特征异于 2 的体,他不能刻画转换,当 K 的特征为 2 时,即使他能够刻画转换,而体的半自同构观念仍然成为最后结果的含糊疑点.作为现在研究的一个附产物,作者证明了在 Ancochea 与 Kaplansky 意义之下,半自同构或者为自同构或者为反自同构.将这一结果与 Dieudonne 的结果联合起来,我们就可以立刻解决特征为 2 的 K 上 $GL_2(K)$(或 $PGL_2(K)$)的自同构问题(所谓 $PGL_2(K)$是将 $GL_2(K)$中形如 rM 的所有元素恒同为$PGL_2(K)$的一个元素,此处 $r\neq 0$ 过 K 的中心的所有元素).本文还将解决更困难的关于 $GL_2(K)$的自同构问题,此处 K 的特征异于 2.

Dieudonne 留下第二个未解决的问题是关于特征群 $SL_4(K)$ 与 $PSL_4(K)$的自同构问题(所谓 $SL_n(K)$是由所有 $P_{ij}(\lambda)$生成的群,其中 $P_{ij}(\lambda)$为 $n\times n$ 单位方阵,但其(i,j)位置是 $\lambda,\lambda\neq 0$).由于维数较高,所以比前一问题较为容易一些.自同构群将于§6 决定.

在非定型正交群系中仅留下未解决的问题是决定 $O_4^+(K,f)$(及 $PO_4^+(K,f)$)的自同构群,此处 K 的特征异于 2 及 f 为以 2 为指标的二次型.这个问题与作者关于斜对称矩阵几何的研究密切相关,一些新型的自同构出现了;这些奇异现象给予正交群交换子(commutator)子群 $\Omega_n(K,f)$的研究提供了启示.这将构成以后研究的主题.

作为结论,华罗庚写道:"值得一提的是,这些问题的现象表明了维数愈低,则问题愈难,Dieudonne 用的方法对高维是有效的,并可以对个别低维情况加以应用.如他所指出的那样,当维数 n 减小时,困难就加大了.Dieudonne 的方法对于 n 小时,变得非常笨

掘，有时还不能解决最小 n 时的情况．另一方面，笔者的方法从尽可能小的 n 开始，这常常是最困难的情况，而读者不难用笔者曾用过的方法从本文的特殊结果出发，用归纳法得出一般的结果，进而言之，相比于 Dieudonne 的方法，笔者只用了矩阵计算”．

华罗庚还与 I. Reiner 一起研究了 $GL_n(Z)$ 与 $PGL_n(Z)$ 的自同构群．这是环上典型群工作的开端．他们还证明了当 $n \geqslant 2$ 时，$GL_n(Z)$ 可以由三个元素生成，$SL_n(Z)$ 由两个元素生成，$SP_{2n}(Z)$ 由四个元素生成，证明是初等的．

1950 年，华罗庚回国．他在清华大学组织了一个典型群讨论班，进行了近两年．又于 1957 年上半年，在中国科学院数学研究所重新组织典型群讨论班，讲述了他关于体论与典型群的工作．

1952 年，华罗庚与万哲先一起确定了 $SL_2(K)$ 和 $PSL_2(K)$（K 为特征 $\neq 2$ 的体），$SL_4(K)$ 与 $PSL_4(K)$（K 为特征 $=2$ 的体）的自同构群．

华罗庚与万哲先合作撰写了《典型群》一书（上海科学技术出版社，1963），系统地阐述了华罗庚在体论、矩阵几何与典型群方面的工作及他与万哲先合作和万哲先本人的工作．

书的序言中表述了华罗庚选择典型群作为代数学研究方向的背景、想法与远景：简要地说，体上的矩阵值得注意；易于训练干部；应该与以前熟悉的域及以后可能的发展加以联系．

第四章　复　分　析

§4.1　典型域

1935年，E. Cartan证明了，在解析映照之下，只有六类不可约、齐性、有界对称域，其中有两类是例外域，其维数分别是16与27. 其余四类称为典型域. 用矩阵可以将典型域表示为：

$$R_{\mathrm{I}} = \{m \times n \text{ 矩阵满足 } I^{(m)} - ZZ^* > 0\},$$

$$R_{\mathrm{II}} = \{n \text{ 阶对称方阵满足 } I^{(n)} - ZZ^* > 0\},$$

$$R_{\mathrm{III}} = \{n \text{ 阶斜对称方阵满足 } I^{(n)} - ZZ^* > 0\},$$

$$R_{\mathrm{IV}} = \{z = (z_1, \cdots, z_n) \in \mathbb{C}^n \text{ 满足 } |z z'|^2 + 1 - 2\bar{z}\ z' > 0, |z\ z'| < 1\},$$

其中 Z 的元素为复数，$I^{(m)}$表示 m 阶单位方阵，Z^*表 Z'的复共轭矩阵及z'表示z的转置，而 $H>0$ 表示 H 是定正的.

1943年，Siegel发表了他的著名文章"辛几何"，他用矩阵方法对第二类典型域 R_{II} 及其等价的无界形式，进行了广泛的研究，他并研究了多个复变函数的Abel函数. 华罗庚独立地研究了典型域. 1944—1945年间，华罗庚发表了"矩阵变元的自守函数论"（Ⅰ，Ⅱ）及"多变数Fuchsian函数论"三篇文章，建立了一系列侧重几何学的结果. 他与Siegel研究的侧重面不同，但也有不少重复者. 华罗庚的著作的特点为具体与其直截了当的风格，及他的计算之擅长.

华罗庚决定了四类典型域的运动群如下：

1）长方矩阵几何：运动群由所有下面形式的变换构成：

$$Z_1 = (AZ + B)(CZ + D)^{-1},$$

此处 $A = A^{(m)}, B = B^{(m,n)}, C = C^{(n)}, D = D^{(m,n)}$及

$$\begin{pmatrix}\overline{A} & \overline{B}\\ C & D\end{pmatrix}\begin{bmatrix}I^{(m)} & 0\\ 0 & -I^{(n)}\end{bmatrix}\begin{pmatrix}A & B\\ C & D\end{pmatrix}' = \begin{bmatrix}I^{(m)} & 0\\ 0 & -I^{(n)}\end{bmatrix}.$$

2)对称矩阵几何：运动群由所有下面形式的变换构成：

$$Z_1 = (AZ + B)(\overline{B}Z + \overline{A})^{-1},$$

其中

$$\begin{bmatrix}A & B\\ \overline{B} & \overline{A}\end{bmatrix}\begin{pmatrix}0 & I\\ -I & 0\end{pmatrix}\begin{bmatrix}A & B\\ \overline{B} & \overline{A}\end{bmatrix}' = \begin{pmatrix}0 & I\\ -I & 0\end{pmatrix}.$$

3)斜对称矩阵几何：运动群由所有下面形式的变换构成：

$$Z_1 = (AZ + B)(-\overline{B}Z + \overline{A})^{-1},$$

此处

$$\begin{bmatrix}A & B\\ -\overline{B} & \overline{A}\end{bmatrix}\begin{pmatrix}0 & I\\ I & 0\end{pmatrix}\begin{bmatrix}A & B\\ -\overline{B} & \overline{A}\end{bmatrix}' = \begin{pmatrix}0 & I\\ I & 0\end{pmatrix}.$$

4)复球几何：运动群由所有下面形式的变换构成：

$$Z_1 = \left\{\left[\left(\frac{1}{2}(z\ \ z'+1),\frac{i}{2}(z\ \ z'-1)\right)A' + zB'\right]\begin{pmatrix}1\\ i\end{pmatrix}\right\}^{-1}$$

$$\times\left\{\left(\frac{1}{2}(z\ \ z'+1),\frac{i}{2}(z\ \ z'-1)\right)C' + zD'\right\},$$

此处 $A=A^{(2)}, B=B^{(2,n)}, C=C^{(n,2)}, D=D^{(n,n)}$ 为实矩阵满足

$$\begin{pmatrix}A & B\\ C & D\end{pmatrix}\begin{bmatrix}I^{(2)} & 0\\ 0 & -I^{(n)}\end{bmatrix}\begin{pmatrix}A & B\\ C & D\end{pmatrix}' = \begin{bmatrix}I^{(2)} & 0\\ 0 & -I^{(n)}\end{bmatrix}$$

与

$$\det\begin{pmatrix}A & B\\ C & D\end{pmatrix} = 1.$$

华罗庚证明了三种类型的双曲空间的 Riemann 曲率都是非正的，从而推知他们的几何是相当正规的．他还给出了在辛群之下，超圆的全部分类，并得到 H. Poincare 关于 theta 级数的收敛准则．

华罗庚证明了椭圆空间的基本定理，并给出 Siegel 已证明的双曲空间基本定理的一个新证明．这两个结果为：

一个符号差为(p,q)的椭圆空间映射到自身的解析自同构是空间的一个运动.

一个将双曲空间解析映射到自身的变换是空间的一个运动.

§4.2 典型域上的调和分析

我们先来谈谈多个复变数区域的特征流形的概念.这一概念来自单复变函数论中的最大模定理,假定 R 是 n 个复变数$z=(z_1,\cdots,z_n)$所成的 $2n$ 维欧氏空间的一个有界单连通区域,假定 L 是R 边界的一部分,它满足:凡是 R 内的解析函数一定在L 上取最大模及对于L 上的任何一点ξ,均可以找到 R 上的一个解析函数$f(z)$,它在ξ取最大模,则 L 称为R 的特征流形.它是一个唯一确定的紧致流形,其维数往往大大地低于 R 的边界的维数.例如第二类典型域的维数与 n 阶复对称方阵的维数是相等的,它等于$2n+2(n-1)+\cdots+2=n(n+1)$.它的特征流形是全体酉方阵.其维数为$2n+2(n-1)+\cdots+2-(n+\cdots+1)=\dfrac{n(n+1)}{2}$.当$n\geqslant 2$时,它小于$n^2+n-1$.

华罗庚确定了四类典型域上的函数系$\{\varphi_v(\xi)\}(v=0,1,2,\cdots)$.这种函数系是用群表示论方法具体给出的.使典型域 R 中任何解析函数均可以表示为R 内的收敛级数:

$$f(z)=\sum_{v=0}^{\infty}a_v\varphi_v(z).$$

函数系可以扩充为 R 的特征流形L 上的正交正常完备系$\{\varphi_v(\xi)\}(v=0,\pm1,\pm2,\cdots)$,如同复平面上的 A. L. Cauchy 核可以由幂级数

$$\sum_{n=0}^{\infty}z^n e^{in\theta}=\frac{1}{1-ze^{i\theta}},\ |z|<1$$

得出来一样,华罗庚求出了四类典型域下面函数的具体表述式:

$$\sum_{v=0}^{\infty}\frac{\varphi_v(z)\overline{\varphi_v(\xi)}}{\lambda_v}=K(z,\bar{\xi})\quad(\text{S. Bergman 核}),$$

$$\sum_{v=0}^{\infty} \varphi_v(z) \overline{\varphi_v(\xi)} = H(z,\xi)(\text{Cauchy 核}),$$

$$\frac{H(z,\xi)H(\xi,\bar{z})}{H(z,z)} = P(z,\xi)(\text{S.D. Poisson 核})$$

其中 $\lambda_v(v=0,1,\cdots)$是由

$$\int_R \varphi_v(z)\varphi_u(z)\dot{z} = \lambda_v \delta_{uv}$$

定义的特征根,而 δ_{uv}为 Kronecker 符号,$\dot{z}$ 表示R 的体积元素.

华罗庚考虑了第二类典型域特征流形上的 Fourier 级数的求和问题.他证明了酉群上的 Fourier 级数可以有 Abel 求和定理.

华罗庚的复分析工作由陆启铿与龚昇作了系统而深入的发展、例如陆启铿关于 H.A.Schwarz 引理的工作及他与华罗庚一起作的典型域的调和函数论方面的工作.龚昇关于酉群上调和分析的工作及多复变 Cauchy 型积分的工作,都是很重要的,在此就不详细叙述了.

§4.3 评论之十一(格拉叶夫)

中国著名数学家华罗庚的这本专著的主题为研究多个复变数空间的有界域的几个类型.首先是 E.Cartan 叙述了这些类.它们的研究对 Lie 群表示论、齐性空间理论、多个复变数自守函数理论都是非常重要的.因此,华罗庚的书对上述领域中其他作者的工作,也都有着密切的联系的.在此,我们想到了 E.Cartan, I.M. Gel'fand, F.A.Berezin, R.Godement 与 Harish-Chandra 关于 Lie 群上的特殊函数论及关于 Lie 群上有限维表示论的众多工作;I.M. Gel'fand, M. A. Naimark, F. A. Berezin, M. A. Graev 与 Harish-Chandra 关于 Lie 群无穷维表示的工作及多个复变数自守函数论的一些结果,其中有些结果可以在 C.L.Siegel 的书《多个复变数解析函数论》(普林斯顿高等研究院,1950;俄文译本,IL,1954)中找到.我们还应该提到 I.M.Gel'fand 与 M.I.Graev 关于齐性空间

Lie 群表示论的结果；F. I. Karpelevic 与 I. I. Pjateckii-Sapiro 最近关于对称空间边界的有趣结果，这些结果被作者用于对称空间的调和函数论与多个复变数自守函数论中；I. M. Gel'fand 与 I. I. Pjateckii-Sapiro 关于表示理论及自守函数论的结果（见书末的补充文献）. 这个非常不完全的列举已足以见到华罗庚的书与近代数学中发展得最快的一些分支的紧密联系了.

本书的基本问题之一，为发展一个所研究区域的 Poisson 积分类似，并对调和函数来求解 Dirichlet 问题. 书中的大部分结果都是属于作者自己的. 这些结果往往是用广阔的代数工作，复杂的直接计算及作者熟练掌握的有限维表示理论工具建立起来的. 许多辅助性的结果，如某些有趣的代数恒等式，或矩阵变元函数的积分计算（例如积分 $\int_{-\infty}^{\infty}(1+x^2)^{-a}dx$ 的矩阵类似），无疑都具有独立的兴趣.

在他用直接计算来进行研究工作时，不幸的是作者未能用到问题的群论形态之可能性. 实际上，群论形态可能给很多结果以清晰的了解，有时还可以给结果的证明以简化. 作为一个例子，我们指出如何用群论的语言来定义 Poisson 核. 命 R 为书中所研究的一个区域及 L 为它的特征流形. 命 z 为 R 中的一点及 C_z 为 R 的解析自同构且使 z 不变之群，则可以证明群 C_z 在 L 上是可迹的，即可以将 L 的任何一点映射至任何一点. 在变换 C_z 之下，L 的测度就等于 Poisson 核.

华罗庚的书是写得很简略的，它需要读者有一个很好的数学教育背景及高度的注意力. 需要读者熟悉有限维群表示论的基本知识（例如 Murnaghan 的书《群表示论》，John Hopkins 出版，1938，俄文版，IL，1950 年版的前三章）.

本书在中国以专著的形式发表的时间略早于在莫斯科召开的全苏第三次数学代表大会（1956）的时间. 作者参加了那次大会. 应外国文献出版社（IL）的要求，作者特别为他的书的俄文版作了修订与准备.

本书之末附有一个与本书所讨论问题有关的文献.

(见 M. I. Graev,"L. K. Hua, Hamonic analysis of functions of several complex variables in the Classical domains, Tran. of Math., monog;6, 1963, AMS, Russian edition, IL, 1959, 编者导言". 王元译)

§4.4 评论之十二(库朗尼)

这是作者在过去 15 年中发表的众多论文的系统总结. 本书研究的对象为有界对称域的典型(即它的解析自同构群 G 为非除外的简单实 Lie 群). 它们的矩阵表示首先是 E. Cartan 研究的. 第Ⅰ章包含了以后要用到的某些代数结果,其中包括行列式的恒等式,涉及多重幂级数的恒等式及一般线性群的既约表示与特征标. 第Ⅱ章,作者对于每一类典型域,明确地算出了积分 $\int_D (1-|z|^2)^\lambda \mathrm{d}x\mathrm{d}y$($D$ 为单位圆盘)的类似. 第Ⅲ章中引入了极坐标,即对应于 G 的 Lie 代数的一个 Cartan 分解的坐标,一个点的"元素"为紧致同衡(isotropy)群 K 的一个元素. 并给出了每一种典型域的坐标变换的明确表达式. 第Ⅳ章则包括了有相当正则边界的齐次圆型域的 Bergman, Cauchy 与 Poisson 核的一般定理. 用第Ⅰ章的结果,对于典型域,这些核都被明确地表示了出来. 在第Ⅴ,Ⅵ,Ⅶ章中,作者叙述了每个典型域的正则 L^2 函数空间中的正则正交系及特征流形的 L^2 空间的正则正交系. 作者研究了 Poisson 核的边界性质并解决了 Dirichlet 问题,作者还讨论了特征流形上什么函数可以作为全纯函数边界值的问题. 这些章的研究主要涉及到典型群的表示理论. 在本书中并未用到对称空间的一般理论. 四种典型域研究中所需的计算都已给出,只有一个简短的参考文献. Graev 为俄文版所作的导言指出本书与 Gelfand 与 Harish-Chandra 研究的联系. 一个引人注目的问题如用一般的理论框架来解释作者的所有结果,并将这些结果推广到例外域中去.

(见 A. Koranyi,"L. K. Hua, Hamonic analysis of several complex variables is the classical domains, Russian edition, IL, 1959" Math. Rev.;23, A 3277, 1962. 王元译)

§4.5 从单位圆谈起

典型域可以看作普通复平面上的单位圆在高维空间中的类似.所以典型域对于高维复空间的意义类似于单位圆对于复平面的重要性.实际上,一些高维空间难于解决的问题,借助于复平面上单位圆上的结果与方法,就有可能受到启发.例如华罗庚就是由复平面单位圆上的线性变换来求得 Poisson 核的.将这一方法推广而求得以前未曾得到过的球上 Poisson 核的.本书就是由此开始写的:

变换

$$W = \frac{z-a}{1-\bar{a}z}, \quad |a|<1$$

将复平面上的单位圆 $|z|<1$ 变为单位圆 $|w|<1$,其中 $|z|=1$ 变为 $|w|=1$.微分上式得

$$\mathrm{d}w = \frac{1-|a|^2}{(1-\bar{a}z)^2}\mathrm{d}z.$$

考虑单位圆的边界:记 $z=e^{i\tau}, w=e^{i\psi}$,则得

$$e^{i\psi} = \frac{e^{i\tau}-a}{1-\bar{a}e^{i\tau}} = \frac{1-ae^{-i\tau}}{1-\bar{a}e^{i\tau}}e^{i\tau},$$

$$e^{i\psi}\mathrm{d}\psi = \frac{1-|a|^2}{(1-\bar{a}e^{i\tau})^2}e^{i\tau}\mathrm{d}\tau.$$

将这两式相除即得

$$\mathrm{d}\psi = \frac{1-|a|^2}{|1-\bar{a}e^{i\tau}|^2}\mathrm{d}\tau.$$

记 $a=\rho e^{i\theta}, \rho<1$,则得

$$\mathrm{d}\psi = \frac{1-\rho^2}{1-2\rho\cos(\theta-\tau)+\rho^2}\mathrm{d}\tau,$$

其中

$$P(\rho,\theta-\tau)=\frac{1-\rho^2}{1-2\rho\cos(\theta-\tau)+\rho^2}$$

称为 Poisson 核.

将这一方法加以推广,即可以得到高维球的 Poisson 核:命 $x=(x_1,\cdots,x_n)$,$u=(u_1,\cdots,u_n)$,则 n 维单位球为

$$x\ x'<1,$$

其边界(球面)为

$$u\ u'=1,$$

我们可以类似地来定义球的变换群:由球面体积元素的变换得

$$\dot{u}=\left(\frac{1-a\ a'}{1-2a\ x'+a\ a'}\right)^{n-1}\dot{x},$$

可以定义球上的 Poisson 核如下:

$$\left(\frac{1-a\ a'}{1-2a\ x'+a\ a'}\right)^{n-1}.$$

Poisson 核可以展开成球多项式的无穷级数,其系数由 Gamma 函数及超几何级数明确地表示.我们可以证明球多项式具有正交性质.这样一来,实际上得到了球上的正交系,从而可以得到球上函数的 Fourier 展开式.这也可以看作球上 Fourier 分析的开端.

本书还给出广义函数另一个处理:广义函数可以从形式幂级数出发来加以定义,假定单位圆内有一个收敛幂级数

$$\sum_{-\infty}^{\infty}\rho^n a_n e^{2\pi in\theta},\ (0\leqslant\rho<1).$$

则形式幂级数

$$u(\theta)=\sum_{-\infty}^{\infty}a_n e^{2\pi in\theta}$$

就定义了一个广义函数,由圆内幂级数的加法与乘法可以定义广义函数的加法与乘法.由 a_n 的阶的限制,即得出各种广义函数.例如若存在整数 m 使 $a_n=O(|n|^m)$,则对应的广义函数称为型 S 的广义函数,即 L.Schwarz 广义函数.

本书涉及面颇广,但不少地方尚待深入研究.因此英文版封面

上写有“高等分析的背景”几个字是颇适当的，关于本书的详细介绍，请见下节 Hayman 对本书的评论.

§4.6 评论之十三(海曼)

在他讲的一个故事中，E. A. Poe 描写了一间房屋里的热烈讨论：一个看热闹的人说，他想这个问题是用意大利语来叙述的，但他不会说意大利语. 另一个感到这是用的俄文，但他对斯拉夫语不了解. 当我试图着来描写华罗庚的书的时候，我感到自己和这些人的处境是相类似的.

华罗庚以一个数论专家开始了他的学术生涯，并对 Waring 问题作出过突出的贡献. 但数论却是本书中未涉及到的少数领域之一，本书涉及到微分方程、群论、线性代数、微分几何、相对论、调和分析与复分析. 因此，大多数读者将会从书中发现一些他们不知道的事情，而大多数材料对于我来说，也是如此. 这反映了这样的事实：近 30 年来，作者非常独创性地领导了中国的数学. 为了教育年轻的一代，作者撰写了一些教科书并在许多领域里从事研究工作. 他还阐明了数学在各种应用领域中都是有用的.

尽管书末有一个有用的索引，但缺乏引文，在正文中，作者亦非同样热情地征引其他作者的工作. 因此华罗庚注意到“……3 维球几何就是特殊相对论不同的外观. 但这一点经常地被忽略了，如 V.A.Fok 在 1961 年出版的书《空间，时间与引力理论》中，作者仍然沿用了 Riemann 几何与 Lie 群老的方法”，及 155 页“……这样定义的广义函数比 L. Schwarz 定义的，其范围要广得多”.

不变量的研究是支配讨论的要素之一，因此在第 1 章，作者用单位球体的双曲运动群来讨论调和函数及 Poisson 公式. 度量

$$\frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}x'}{(1-x\ x')^2}$$

是不变的，此处 x' 为对应于行矢量 x 的列矢量. 在高于 2 维的情况下，调和函数就不是不变的，但若同时改变独立的与相依的变数，

则仍可得不变函数.

在第 7 章中,类似的理论为建立在单位球的双有理变换

$$x_1 = \frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_3x + b_3y + c_3}, \quad y_1 = \frac{a_2x + b_2y + c_2}{a_3x + b_3y + c_3}$$

下的不变量.这将导致不变的 Riemann 度量

$$\frac{(1 - y^2)\mathrm{d}x^2 + 2xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y + (1 - x^2)\mathrm{d}y^2}{(1 - x^2 - y^2)^2}. \tag{1}$$

每一个不变量对应于一个微分方程,经某些变换,对应于度量(1)的微分方程就变成 Lavrentiev 方程

$$\mathrm{sgn}\xi \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0.$$

这是一个混合型方程.当 $\xi>0$ 时为椭圆型,它对应于单位圆盘之内,在单位圆盘之外,则为双曲型.对于不同的边界值,作者讨论了这一方程解的存在性与唯一性问题,而唯一性条件系“比 Bitzadze 的条件为好”(第 140 页).

第 2 章将 Fourier 级数推广至球上的函数:正交性与可展开性.这在很大程度上是经过球多项式

$$P_m^{(\lambda)}(\xi) = \sum_{0 \leqslant l \leqslant \frac{1}{2}m} \frac{\Gamma(m - l + \lambda)}{\Gamma(\lambda)l!(m - 2l)!}(2\xi)^{m-2l}$$

来进行的.作为应用,作者得到了微分方程$\partial_u^2\phi = \lambda\varphi$ 的特征根 $\lambda = -l(l + n - 2)$,此处∂_u^2 为 Laplacian 切于单位球的部分.在第 8 章中,作者经有限 Fourier 级数变化而来的 Fourier 级数的不同类型来定义广义函数类;由系数满足不同的增长条件到无限制的形式级数.他亦讨论了对偶空间.

在第 3—6 章中,作者介绍了与相对论有关的几何.从一个不变的二次型出发,它可以是一个实球、点球或虚球,我们就得到了双曲、抛物与椭圆几何(第 6 章).若二次型为

$$x_1^2 + \cdots + x_n^2 - x_{n+1}^2,$$

则得到在 Lorentz 群下的不变量,在第 5 章中,作者经过有关的 2×2 Hermitian 矩阵的基本结果证明了刻画狭义相对论的光速不

变性.

这本书无疑是富于刺激性的.它是为刚起步做研究的学生而设计的.如果不计较作者将有关的方法作了直接法的替换,从而导致了过重的形式化,则他们将会无疑地一睹现有的许多领域.

(见 W.K.Hayman,"L.K.Hua,Starting with the unit Circle, Springer,1981".Bull.London Math.,Soc.;1982,560—562.王元译)

第二篇　应用数学与数学普及

第五章　导　　言

§5.1　概述

华罗庚精神的精髓是永无止境的勤奋探索与不断的创造. 华罗庚一生在数学上出现过五个创造高峰期，前四个属于纯粹数学，最后一个是应用数学.

与古今中外的所有著名数学家一样，华罗庚的数学科学生涯始于纯粹数学领域. 20 岁之前，他在家乡勤奋自学发表了几篇初露锋芒的数学论文，是他步入纯粹数学的起点. 而后，他受到当时数学界的关注，使他有机会到清华五年、剑桥二年（1931—1937），在纯粹数学领域深造、攻坚，并做出世界一流的纯粹数学工作，引起了国际数学界的重视，达到了他一生中的第一个创造高峰.

1938 年为了祖国的抗日战争，他毅然决定回国. 回国后，立即被当时的最高学府——西南联大破格聘为正教授，他在条件极其艰苦的昆明（战时交通梗阻，国外资料奇缺，物质生活低下），由堆垒素数论，转而自守函数，再转入矩阵几何等，其成果震动了世界，完全确定了他作为纯粹数学若干分支的世界领袖人物之一的地位，达到了他一生辉煌的第二个创造高峰.

1946 年，华罗庚先访问了苏联，后赴美考察，并应邀在美国工作了四年. 他的阅历、他的视野和他在学术上的成就，都达到了更高的境界，出现了他一生的第三个创造高峰.

1950 年，他决然绕道回国为祖国服务. 在回国后的最初六

年，他开创了中国很多纯粹数学的重要领域，并培养了一批纯粹数学的将才，他在学术上的成果达到了一生辉煌的顶点，出现了他一生第四个创造高峰．

1957 年是个转折点，此后他把研究重心逐渐转向应用数学，从 1958 年起，他个人的工作场所也由中科院数学所移至中国科技大学．在中国科大创建应用数学与电子计算机系，这是他为培养应用数学人才的第一次尝试，他被任命为该系主任、该校副校长．与此同时，他开始探索在中国研究应用数学的新路子．一方面他和他在纯粹数学领域培养的将才一起，努力探索纯粹数学的应用工作；另一方面，他认识到为国民经济服务的应用数学，在当时之中国，首先应从普及数学方法做起，从他自己做起，他把一生最后 20 多年的大量时间和精力贡献于在中国普及数学方法，并探索中国应用数学的思想与方法论，形成了他一生最后一个创造高峰．

华罗庚两次放弃国外优越的研究环境而回国服务，做为一个人的行为，这是他自身的素质所决定的，在客观上，这恰好促使他在中国形成三次独特的创造高峰和独特的数学思想、方法和技巧，也使他更杰出地自立于世界数学之林．可以说，没有这两次回国，则没有华罗庚今世之特殊辉煌，没有中国纯粹数学之今天，更没有中国应用数学在 20 世纪 50 年代末 60 年代初的出现．

数学科学发展至今日，已是一座庞然大厦，很少有人既能在纯粹数学领域工作，又能在应用数学领域工作，特别很少有人既是世界一流的纯粹数学家，又是著名应用数学家．在中国数学史上，只有华罗庚达到了这种境界．

国内外数学界对华罗庚一生中两件重大抉择，最初总是不理解的．第一件是华罗庚放弃在美国的优厚待遇和良好的工作环境，于 1950 年毅然决定回国；第二件是正当华罗庚回国后在纯粹数学各重要领域取得重大成就，并培养了一批得力助手的时候，他断然决定把自己的研究重心转向应用数学．实践证明，这两个决定都是关系中国数学（包括应用数学）前途的大事，只有

华罗庚这样高瞻远瞩的帅才才能做得到．国内外数学界现在都清楚地看到华罗庚对中国数学发展的特殊功绩．国外评论说：很难想象，如果没有华罗庚回国，中国的数学会是什么样子．

华罗庚在自学成才过程中表现出他惊人的勤奋和非凡的才能，也磨练了他特有的气质和品格，形成了他在科学探索与创造上所必需的奇特方法论，这些使得他能以振兴中国数学为己任，也使他比别人更知道怎样振兴中国数学．在他奋斗过程中，始终把自己的成就与振兴中国数学紧紧连在一起．因此在从英国剑桥回到昆明不久，他就有了发展中国数学的蓝图．从美国回国后，他以极大的努力开创中国数学的许多重要分支，培养数学将才，组织攻坚队伍，完善他在 40 年代所设想的蓝图，他的目的达到了．

这个蓝图从一开始就包括应用数学部分，华罗庚当年的手稿，将给我们提供研究他学术思想的宝贵资料．他从 1958 年转向应用数学的由来，有其社会环境的外因，更主要的是他自身的因素．他特有的数学观、方法论和他在应用数学上的未付实施的己任，是使他转向探索中国应用数学道路的主要因素．这也是使他坚持 20 多年在中国普及推广数学方法、并探索应用数学在中国发展道路的根本原因．

本书将研究华罗庚探索中国应用数学道路的整个过程以及他的方法论和他特具的品格，如何在探索过程起重要作用．本书还研究华罗庚应用数学观和他的应用数学方法论的形成过程．关于华罗庚对中国应用数学的贡献，除道路探索外，从成果方面说，我们将分两条主线加以研究．一条主线是从分圆域方法（华-王方法）到均匀设计方法，这是来自数学内部的应用数学研究成果，这些成果成功地把纯粹数学中的数论理论应用于解决其他数学领域（近似分析、统计）中的问题．华罗庚和王元早在 1958 年就注意这个方向，并亲自开拓这个方向的研究，他们把数论用于高维数值积分计算．接着，王元和方开泰又把数论方法用于统计分析中，提出了均匀设计的新思想、新方法．这一方法得到国

内外学术界和应用部门的高度评价．在把纯粹数学的理论与方法用于解决其他领域的应用研究方向上，华罗庚还倡导了编码问题研究，万哲先、曾肯成等在这方面取得突出成果，华罗庚鼓励冯康开创计算数学领域研究，取得了创造有限元方法与辛几何算法的卓越成果．在微分方程方面也取得了高水平的成果．这种问题来自数学内部的交叉研究，正显示了基础研究的重要性和威力，它支持并推动了数学中应用性强的分支的发展，也就推动了应用数学的发展．反过来这也给数学基础增添了新的活力．

另一条主线是面向中国实际问题，以解决实际问题为目标的应用数学研究．华罗庚从美国回国后一心想着振兴中国数学事业，当然包括应用数学．当时他在抓纯粹数学研究的同时，一直考虑如何把自己的专长为中国建设服务（在抗战时期他就一心想着为国防出力），华罗庚对什么是应用数学以及如何在中国发展应用数学，有一个探索认识的过程，但是他对发展数学应用和应用数学的重要性的认识始终如一．20 世纪 40 年代在昆明时期他对应用数学的构想；1946 年访苏期间，苏联数学家对应用数学重视对他的启示；二战后国际上应用数学的发展以及他想让他的专长为国家服务的赤子之心，使他在被任命为中科院数学研究所所长之后（特别在科学发展规划的制定时），对中国的应用数学发展做了第一次布署．20 多年后他说："当时对应用数学的认识一直保持在 40 年代（昆明时期）的水平．（当时）数学界，其他人也一样，都认为数学中有些分支比较接近实际．它的发展可能能解决实际问题，发展它就是发展应用数学，有人喜欢贴标签，就把这些分支贴上应用数学．老实说，当时我是积极主张发展像微分方程、概率统计、计算数学等这些分支的，它是发展应用数学的一个方面．当时动员了一些有才干的人去搞这些分支，后来他们干得都不错！"

华罗庚对养育他的祖国、培养他的老师、帮助过他的亲友感恩至深，一般人是很难体会的；对于祖国，他始终想尽力报效，他研究数学，总想为国家干点什么．在昆明时出了成果，想着为

民族争光，还要为国防上打击敌人出力．当时在他的应用数学构思中，就有弹道学、统计学、经济学……，从美国回国后，他更是想为国家经济建设服务．但是，直接为国民经济的应用数学，在他的脑海里当时一直没有具体的内容和形式．这是他当时遇到的最大的难题，不知道如何去服务，简直无法下手．这不能不说是受纯粹数学传统学科思想的影响，跳出这种圈子去思考问题是很不容易的．另一方面，他从发展中国应用数学出发，动员鼓励别人去搞被贴上应用“标签”的数学，自己反而被贴上不搞应用的标签．这就是外部环境的挑战，一个特殊的挑战．

华罗庚说：“他们说我不搞应用数学，我倒要看看，看谁搞的是真正的应用数学?”因此在纯粹数学中培养的各将才已能安营扎寨，各攻一方，应用数学已有第一次布署并已见成效的当时，作为主帅，他要亲自挂帅去探索为国民经济服务的应用数学这个难题．这条道路是如此的艰难，不像那些贴标签的学科，“动员鼓励人去干，就有大将上征途．”那些学科毕竟离纯粹数学较近，有扎实的数学基础并有一定数学素养的人，比较容易进入该阵地，同时在该阵地上施展才能的思路和方法论，跟纯粹数学几乎没有什么两样．为国民经济服务的数学不单是一个数学学科，研究的问题多来自数学外部，光有数学功底和素养还不能胜任．正如著名数学家 G. B. Dantzig 说的：“对于几乎从来未接触过应用方面的问题，只有纯粹数学背景的人来说，要他懂得如何用数学术语表述一个现实世界的问题，差不多是不可能的．解决现实问题就更难了．”后来中国的实践也证明，纯粹数学家大都只关心应用数学中已提成数学问题的那部分数学，而把实际问题变成好的数学问题正是应用数学家的最主要的任务．

华罗庚说：“这条道非我自己亲自去探路不可了！没人敢去了，因为一去就碰钉子，让你们（指年轻人）去行吗? 不行！我必须亲自出马，我还有我的优势．”他既下了决心，就一干到底，从最初探索到蹲点试验，再普及推广，……未走完一个全过程就花了 20 多年的时间．

这个过程是从1958年开始的，最初的探索工作是和王元一起进行的，本书将简要叙述这个过程，因为这个过程很重要，这个过程就是华罗庚在中国探索应用数学的过程，也是形成他的应用数学观，应用数学思想、方法论的过程．一位世界一流的纯粹数学家在一个发展中的国家开展应用数学，所走的路、所形成的独特思想是珍贵的．这里我们还要强调一下，纯粹数学研究与应用数学研究的区别之一也在于此．纯粹数学研究的道路探索（对个人而言），从小学到大学直至研究生，毕业后进入研究单位，国内外经过几百年已形成了一个可循的模式，无论是哪个国家，无论是科班出身的还是自学成才的，个人在研究道路上的探索过程基本模式是相同的，应用数学则不然．华罗庚探索中国应用数学道路中，也包括对人才培养的探索．他曾经想过：或许应用数学是一门技艺，是否应当用师傅带徒弟的办法去培养真正的应用数学工作者．但是他一生的实践，未能得出结论．他说他在培养接班人上做了他所能做的一切，包括捧场在内．他说看来在于：理论＋实践＋个人悟性的良好结合．

叙述这个过程另一个重要点在于，华罗庚在普及推广数学方法方面的工作是中国传统文化的一部分，它又具有世界意义，被称为百万人的数学．但从他探索中国应用数学道路上看，他晚年也觉得在普及推广上花的时间，精力似乎多了点，因为这毕竟不是他发展中国应用数学的主流，普及仅是第一步，他要上第二层次，但来不及了，这有社会因素，也有内在的因素，他自己十分清醒．

华罗庚说：他搞双法实际上是抓住了两块敲门砖，目的在于敲开中国应用数学的大门．他说："我在应用数学上的工作，除了倡导鼓励，与王元合作之外，主要是建了一个门：两个柱子（双法），一根横梁（特征矢量法）；其他也许更重要的是方法论上的体会．"他希望年轻一代能站在他的肩膀上爬上去，对于搞应用数学的人，主要是指在方法论和数学运用的技巧上，既要能入门，更要善于从实际中创造许多特殊模型与算法，这与纯粹数

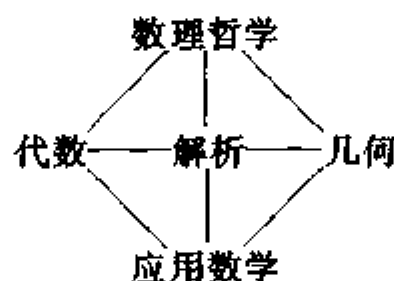
学的细功精巧的要求不同.

什么是数学? 什么是应用数学? 时至今日各家有各家的看法，我们不去综述评论这些. 华罗庚的应用数学观，他的分类法，他在应用数学方面的主攻方向，他的方法论，对中国应用数学发展将起重要作用. 本书将从20世纪40年代初期，华罗庚还在主攻纯数学时期，对发展中国应用数学的看法写起.

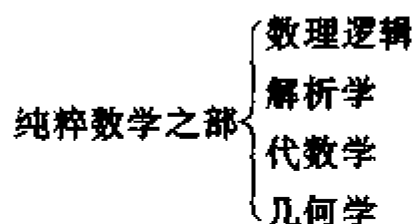
§5.2 倡导

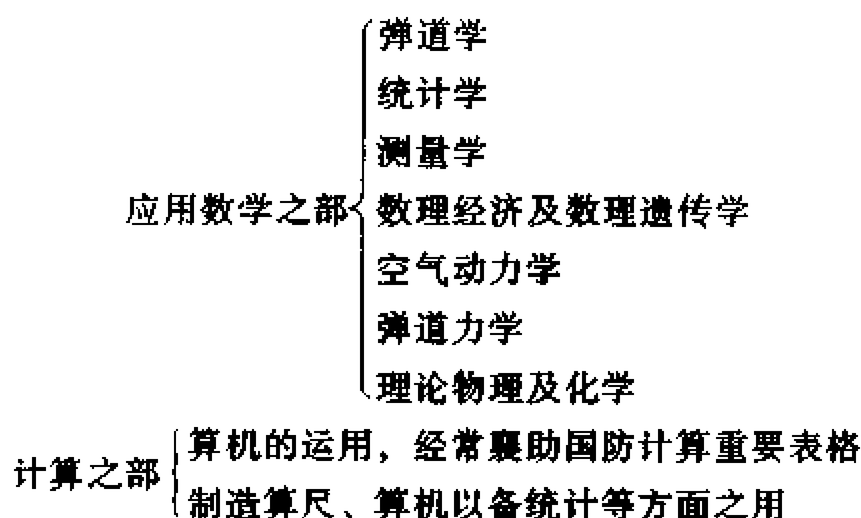
早在20世纪40年代，华罗庚就认识到了应用数学的重要性，并为之呐喊.

华罗庚对应用数学的构思，始于40年代初，在昆明西南联大时期. 1938年华罗庚从英国带着第一创造高峰期的硕果回国，在西南联大任教授. 又经过几年的奋斗，在数学王国里，他已是纯粹数学若干领域世界领袖人物之一，他站在当时世界数学发展的前沿看中国数学界，除了自勉要独创更多比西方数学家更“博广与精到”的理论外，对中国数学的发展已形成“横贯纵通”的构思，如下图（见附录）:



并提出当时正在筹建的数学研究所应包括：纯粹数学之部，应用数学之部和计算之部，即





此图为华罗庚于20世纪40年代初期所制，他的横贯纵通含意一目了然．数理哲学尽管有不同流派，对于数学发展的作用具有根本性指导意义．

华罗庚当时就认识到发展应用数学的重要性，访苏后更激起他重视应用数学，这是他与众不同的又一方面．当时他刚刚30出头，年富力强，在专攻方向节节取胜．一般人容易满足现状，满足于在自己熟悉的天地里施展宏图．华则不然，他的思路有他必然的奇特性．这是他行为奇特的基石．就当时而言，他不满足作为学术上一方领袖，总是在考虑自己的学识如何报国（在当时的时代背景就是为国防服务），所以，他非常重视理论与实用的联系．1944年他已被安排出国考察，出国前他在给陈立夫的信中说："此次出国之目的，一方面固为广数学方面之见闻，而他方面，实为理论及实用谋一联系也．盖就国防观点以言，数值计算，机器计算实为现代立国不可或缺之一项学问，而我大学之数学课程内容，大致仍抽象而忽具体，数值计算往往为不了解者以"容易"二字抹煞之．因之，毕业之学生，坐谈几无一不知，实算则茫无一策，以之谋国，则不啻风马牛，以之言学术，则将流为浮夸风焉"（见附录）．真是切中时弊之言！

1946年，华罗庚应苏联科学院与苏联对外文化协会的邀请访问了苏联三个月，他受苏联重视应用数学的启发，认识有了进一步的提高．他说："我几年前，就曾呼吁过，我们中国科学要

进步，除去必须注意到理论的研究之外，还需要注意到理论和应用的配合．理论如果不和应用配合，则两相脱节，而欲求科学发达，实在是不可能的”．“同时我联想起我国将来数学研究所的工作，似乎不应当只偏重于纯粹数学或纯粹数学的一部分而已”（见附录：“访苏三月记”）在那时的中国，对应用数学有这样的认识，可以说是独一无二的．

1952 年，中国科学院数学研究所成立，华罗庚被任命为所长，数学所的框架就是按照华罗庚的上述看法设置的：除纯粹数学外，设有力学研究组与电子计算机设计制造组．这对以后力学与计算技术与算法的发展都起了重要的作用．

这时期华罗庚本人仍在搞纯粹数学，当时他自己没有时间和精力从事应用数学的研究工作．这段时间他虽然对 W. Leontief 的“投入产出法”有兴趣，但那是将它作为一个应用数学的理论来看待，在讨论班上讲讲引起大家兴趣而已，并未考虑其实际应用．

从 1946 年到 1957 年，他一直在强调应用数学的重要性，希望在他的强调和鼓励之下，有一部分人去发展应用数学．也就是说，在这个时期，他努力倡导发展应用数学，主要是想鼓励别人去搞应用数学．确实，在他的感召之下，有一些有才干的人去搞当时人们共认的应用数学分支，如冯康去搞计算数学，也有人去搞微分方程和概率统计，有些人开始看重运筹学．

§5.3 尝试

1957 年之后，受当时政治形势的影响，左的一套做法必然在数学界有所反应．当时有一条口号叫做“理论联系实际”．实践是检验真理的唯一标准，现在看来这一口号本身是正确的．但问题在于如何解释？它的内含是什么？当时所谓的“实际”是指工厂的生产实际，而且强调所有的数学理论（包括纯粹数学中的数论、代数、几何等）都要联系实际，都要与工厂生产实际联系

起来．这样一来，华罗庚原来心目中的应用数学也都没有用处了．按当时中国的生产水平，恐怕连中学数学课的内容也不能用于生产，更不用说更高深的数学了．这实际上就是数学研究与教学中的取消主义．

华罗庚从20世纪40年代开始就倡导应用数学．40年代他构想的发展应用数学的蓝图，在他担任中科院数学研究所所长之后又有了发展，并按蓝图做了实际布署．在当时之中国，他是考虑发展应用数学最多的人，他反而被批判，说他不搞应用数学．处于华罗庚的地位，他所承受的压力就可想而知了．本来他倡导应用数学，鼓励别人去干应用数学，但自己的主攻方向还是纯粹数学．所以他从来没有想到过自己在这个时期要亲自下水去搞应用数学．一旦真正要他自己去搞应用数学时，他就束手无策了，不知从何下手．这时，一方面，他要王元去北京西郊的高等工科院校联系，看看他们有没有与数学有关的待解决的问题．王元从北京矿业学院的教师那里借来了两本"矿体几何学"．于是他们用微积分方法将书中用普通几何方法得来的结果加以重述与改进，并合作写成了第一篇论文，这是华罗庚、王元应用数学的处女作．另一方面，他积极参与当时应用数学的探路工作．当时中国数学界正在学习与普及运输问题中的线性规划方法．华罗庚也参与了学习，并与大家一起到汽车运输的现场，从事调度工作．他还带领他和王元正在授课的中国科大应用数学系的学生一起去；随后他还带领这批学生到农村，帮助农民搞麦场设计．他还让他的学生温寰海、杨德庄利用暑假时间帮助全国劳模时传祥搞胡同垃圾优化运输工作．他甚至用自己的名义发表了一篇关于麦场设计的文章，并在报刊上介绍运筹学，以扩大影响．这些就是华罗庚和王元搞应用数学最初的尝试．

当时参与运输问题运筹学方法普及的数学工作者，还有许国志、越民义、万哲先、龚昇、吴方、桂湘云以及运筹学研究室的几乎所有人员，有关高校数学教师也纷纷响应，并参与实践．这是在华罗庚参与的影响下，在中国形成的第一场普及数学方法运

动. 1960 年在山东济南召开了运筹学现场会议，与会代表有 370 多名.

1958 年以后华罗庚对应用数学的探索与尝试，可以分两条路径加以回顾：一条是探索纯粹数学中数论的应用，这是当初王元到矿院从书本上找问题的继续. 这条路径的探索很成功. 数论方法在近似分析中的应用（华罗庚与王元合作），以及在统计中的应用（王元与方开泰合作）都是创新性的，它给人们以启示，它不但回答了“数论有什么用”的问题，而且促进了应用数学的发展，也增强了数学的综合性，有利于数学的发展.

另一条路径是普及运输问题运筹学和农村数学. 华罗庚开始接受人们对他批判的挑战，这种挑战促使他深思，什么是应用数学？怎样搞应用数学？他开始思索与中国传统文化相适应的面向大众的普及数学工作.

1958 年，当王元将 N. M. Korobov 于 1957 年发表的关于数论用于近似计算多重积分的文章给他看时，这才真正地吸引了他. Korobov 是苏联的著名数论学家，他的上述工作得到了苏联科学院的高度评价，特别其中用到了完整三角和的估计. 华罗庚在读到 Korobov 1959 年发表的第二篇文章——极值系数法之后，产生了用分圆域处理这一问题的想法. 他与王元一起为实现这一想法认真地工作起来了. 应该说多重积分近似计算这一课题，基本上是纯粹数学性质的，因为这个问题的提法与分析学的问题一样，是非常明确的. 所以完全可以像纯粹数学一模一样加以研究. 但是从应用价值看，这个问题已属于应用数学范畴. 这项工作断断续续一直延续到 1965 年. 尽管中间有个“八字方针”的调整时期，但华罗庚并未放弃这一课题，可见他这样做并不是权宜之计. 最终，华罗庚与王元的工作得到了国际数学界的高度评价.

受近似分析中数论方法的启发，从 70 年代开始，由方开泰建议，他与王元合作将数论方法在统计中作了广泛地应用，特别对试验设计的应用更为有效. 这一领域的研究工作能够迅速展

开，跟前期华罗庚与王元的工作积累是分不开的.

从 1965 年开始，华罗庚义无反顾地投入到面向大众的数学普及工作中去. 他对“优选法”与“统筹法”（简称“双法”）的研究及在中国工业部门的普及工作，一直延续了 20 年，直到他生命的终结.

§5.4 首遇之应用问题

1945 年华罗庚偶遇国民政府兵工署长俞大维. 俞曾在美国哈佛大学专攻数理逻辑，成绩优异，后到德国柏林大学深造，在数学上有一定造诣. 当时他在国防部遇到一个数学难题，曾请教过许多外国专家皆无答复. 某日俞请华进晚餐，并把所遇难题说给华听，并说：“若能在数月后得到计算结果，我就感激万分了.”次晨华自厕所出来时，已将答案写在一张手纸上. 俞收到答案后大为震惊，中外许多专家几年都解不了的难题，华竟一夜即成！而解答非常简洁切题！

这个国防难题是个破译密电码问题，据说是美军截获的日军轰炸昆明的密码.

华罗庚说这是他一生中第一次用数学解决一个实际问题，而且是一个国防上有意义的难题. 他说这是莫比乌斯（A. P. Mobius）反转公式的应用. 大概是用某种莫比乌斯公式将用整数表示的明码转换成用整数表示的暗码，只要用莫比乌斯逆变换就可以将密码转换成明码了. 这个问题的解决不仅俞大维非常高兴，深感佩服，华罗庚本人也非常兴奋. 他说：“此次在渝蒙俞署长大维谭次长伯羽以一应用问题久未解决者垂询罗庚，运其愚意获解决于抗战已进入决定阶段之今日，一纯粹学人发现对国防竟能有具体之贡献，其快可知也.”

第一次遇到实际应用问题、第一次成功，而且是在一夜之间解决了许多专家几年未能解决的难题，这种解决实际问题的非凡洞察力、非凡的数学的直觉能力以及解决问题的技巧，是华罗庚

作为应用数学家的特有素质.

在普及推广“双法”过程中，有一次国防系统某专家问华罗庚普及“双法”的助手一个问题，这位助手不懂就去请教华罗庚，华罗庚一听就说：“这是密码中的问题.”助手回复专家说：“你问的问题是密码中的问题.”那位专家听后惊呼：“你怎么知道的?!”当他得知这是华罗庚一眼识破之后，对华罗庚极为敬佩，并立即请求得到华罗庚的指导. 这也是华罗庚后来倡导研究编码问题的起因. 后来有一批数学家走上了这条道路，并做出了突出贡献，万哲先、曾肯成就是其中的代表.

§5.5 试点

1958年以前，华罗庚一直在纯粹数学领域中工作，他已有一峰高过一峰的四个创造高峰期的辉煌业绩，他已是世界一流的数学大师. 正当他和他培养的纯粹数学将才们处于旺盛的创造力的时期，他自己断然决定把重点转向应用数学. 这是需要多大的勇气和魄力啊！何况转过去要从头搞起，这不同于在纯粹数学内部从一个方向转移到另一个方向，在这方面他有多次转移的经历. 但这次不同，这时他对应用数学的认识基本上还是40年代的构思，只知其重要性，不知其真面目，又没有国内外经验可借鉴. 可以说转向应用研究，困难重重. 那么，他何以如此?

辩证唯物主义认为“外因是变化的条件，内因是变化的依据”. 华罗庚当时的转向有其外因和内因. 内因是他完整的数学观，应用数学是他发展中国数学蓝图的重要组成部分，他不但倡导、鼓励别人搞应用数学，他本人总有一天也要下水搞. 他又有自己一生勤奋拼搏所形成的特有的人品和素质，一生探索磨炼而成的特殊的方法论以及他特有的科学造诣和文化素养. 这些特有的东西，使得他敢于下水. 至于何时下水，那是由外因决定的. 华罗庚1950年回国后，经过七八年的努力，他基本上完成了中国纯粹数学的开拓性工作以及人才培养和队伍组建工作. 他有条

件腾出精力去关心应用数学的发展．正在这时，政治形势的发展迫使他提前下决心转向应用研究．

在转向的时候，华罗庚说："看谁搞的是真正的应用数学？"既充分显示了他搞应用数学的自信心和坚强的决心，也是对当时左的一套做法，他不能忍受其不公平待遇的呐喊，左的一套做法不但不肯定他在纯粹数学上卓越的创造功绩和在应用数学上高瞻远瞩的倡导，反而给他贴上"不搞应用数学"的标签．

当然，转向是不容易的．古今中外数学史上，大数学家从纯粹数学转向应用数学是极其罕见的．即使在二战期间，许多受希特勒迫害的数学家，在极其艰苦条件下，还是坚持搞自己原来的方向．有的为了"糊口"去搞点数学的应用，但很快就"归队"了．应用数学的方法论与纯粹数学的方法论确有很大差异．所以，一般说来，在纯粹数学领域工作的数学家外界压力再大也不愿转向搞应用研究．中国的形势发展中，曾有几次把数学家赶到工厂、农村去联系实际，结果只要形势一变好，他们基本上都"归队"了，也是一个明证．

在中国发展应用数学，更要从头搞起．问题在于搞什么，怎么搞．

华罗庚充分认识到面向大众的数学普及工作，对发展中国应用数学的重要性．他长期在做思想上、理论上和技术上的准备，一个偶然的机会，他寻到了后来他称之为"统筹方法"的好的数学方法．方法有了，如何普及又是一个大问题？通过报纸宣传呢？还是组织全国性的普及讲座呢？最后，他选择了毛泽东的做法：先在"点"上试验，后在"面"上推广，并且要亲口尝一尝"梨子"的滋味，亲自带领队伍试点．

第一次试点

目的是在工厂普及统筹方法，提高工厂管理和生产组织水平．

(1) 选点

华罗庚认为第一次做试验的点，应是一个全国重点工业企

业，在这样的工厂进行数学方法的普及，所取得成果更有意义和推广价值．为选好第一个试验点，他派杨德庄、邓伟廉（中国科大数学系教师）作为他的‘特使’，到全国大型企业，如鞍山钢铁厂、北京电子管厂（774厂）等大厂做实地考察．这些厂都有全国著名劳模，他们也是全国人大常委，华罗庚曾在全国人大常委中介绍过统筹方法，他们听后都觉得对自己厂很有用，都热烈欢迎华罗庚到他们厂去试点．华罗庚最后选定774厂做试点．

(2) 队伍的组织

方法有了，点也选好了，剩下的问题是谁去干，即如何组织一个队伍去试点．

华罗庚自1958年以来，他的工作场所已由中科院数学所转到中国科技大学．中国科技大学校长郭沫若和党委书记刘达大力支持华罗庚的这次试点，认为这是探索中国应用数学道路——从普及入手的第一次试点，也是大数学家华罗庚愿把数学用于国民经济建设的一次试点．因此，中国科大党政领导做了三项决定：

①成立试点领导小组，由华罗庚、艾提（数学系副主任）、杨德庄组成．

②中国科大1960年入学的正面临毕业的数学系运筹学专业的全体学生，下厂参加试点实习，不做毕业论文．（这批学生中有后来一直跟随华罗庚普及“双法”的陈德泉、计雷等人）．

参加试点工作的，还有中国人民大学企管系的2名讲师和中国科大数学系七八个教师．全体师生三十来人，听从主帅华罗庚的调遣和指挥．

③试点工作时间半年．

(3) 怎么普及

试点工作程序由华罗庚亲自安排，他亲自讲解统筹方法，听众有774厂的领导、车间负责人和技术人员，以及全体下厂的师生．然后师生分成若干小组下车间，与车间领导、技术人员、工人三结合，一边劳动，一边了解生产过程，注意寻找统筹方法能用得上的实际问题．

华罗庚讲解的统筹方法，非常通俗易懂，很受欢迎．他以日常生活例子，生动形象地介绍统筹方法的基本原理，实施的具体步骤，列举了国外应用的实例，唯一缺的是我们自己干出来的实例，所以他动员大家千方百计寻找统筹方法应用的实际问题，力图用上统筹方法，为提高工厂生产水平做贡献．

（4）效果

华罗庚在下厂试点前，曾很乐观地估计，用不了半年就能见成效．他想大约三个月就能见分晓，然后向全国推广．所有下厂的师生、厂领导、车间头头，听了统筹方法介绍后也都一样乐观，都觉得能很快在774厂见成效．

下厂师生在华罗庚指导下，与厂工人、技术人员同吃同住同劳动，一心一意寻找统筹方法的应用实例．他们对电子管大中小各种类型、各种规格的产品，运用统筹方法画了许许多多统筹图．试图用统筹方法组织与管理生产过程，但是工厂生产过程是日复一日连接不断地批量流程，统筹方法中抓主要矛盾线，调整时差等有效办法，很难应用到这种生产过程．反倒是在大型维修、研制新产品上，用上了统筹方法．结果是半年时间的普及应用统筹方法工作，对774厂的生产组织与管理，没有发挥多大作用，谈不上对工厂产生多少效益．因此，这次试点基本上是不成功的，这是出乎原来预料的．

（5）总结

下厂师生按期返校，在总结这次下厂试点的经验教训时，大家充分认识到普及一种数学方法之难．原因何在，看法不一．在当时形势下，许多人都把普及统筹方法试点成效不显著的原因，归结为群众路线没有贯彻执行好．

华罗庚冷静地分析了各种因素，他明白了，在选点时，忽略了一个重要条件：那就是统筹方法更适用于单项工程．而他们在774厂遇到的生产过程大都不是单项工程．

“吃一堑长一智”，在此后的选点时，华罗庚特别注意普及技术是不是“对路”，也就是第一次试点给人们的启示：应用数学

要注意研究对象的特殊性，即使是在普及数学方法的层面上说，也要注意方法与对象的"对路"，切忌"看样子能用上"的想当然做法，其结果必然是花了精力不解决问题.

第二次试点

774厂试点之后，华罗庚觉得统筹方法还应当选点试验，一定要见成效．他向许多人介绍过统筹方法，其中有铁道兵副司令员郭维诚，郭正在带领铁道兵在西南修成昆铁路．他给华罗庚讲述了修铁路中许多单项工程，比如"逢山开路、遇水搭桥"；开路，在西南横断山脉中要修许多隧道；搭桥，要在峡谷中建大桥．这正是统筹方法可以用武之地．华罗庚当即接受郭的邀请去了西南．这次试点因为有了第一次试点的经验教训，精兵简政，他只带了中国科大历届留校部分毕业生和个别外单位人员，艾提仍为他的副手，杨德庄因任教没去.

华罗庚一行在西南铁路工地普及统筹方法，条件非常艰苦，翻山越岭，经常有险情，还发生过翻车事件．这次试点工作，经过军民努力，成效显著，修隧道、建大桥等许多单项工程，运用统筹方法都很成功.

这是一次突破，是面向大众的数学普及工作的突破，华罗庚本人受到很大鼓舞．他给毛泽东写了信，并寄上一本他写的《统筹方法平话及补充》，毛泽东很快给他回了信．毛泽东的信，极大地鼓励了华罗庚，他更加坚定地走普及数学方法的道路，为探索和发展中国应用数学奠定基础.

这次试点还引发了华罗庚要普及"优选法"及要进行第三次试点的想法.

事情发生在"乌蒙磅礴走泥丸"的地方，在乌蒙山铁路工地上，华罗庚得知因为一个雷管引线的质量问题，牺牲了两个战士的生命．他想如果运用"优选法"可以事先将参数优选好，使之不出或少出废品，它的意义有多大啊！他筹划着试点优选法之事，可是由于"文革"发生了，直到1970年夏天，他在上海才找到了第三次试点的机会.

第三次试点

华罗庚在西南试点成功后回到北京，然后在北京等地继续普及推广统筹方法，力图取得更大的成果．那时他普及推广统筹方法的基本力量还是中国科大的留校毕业生，在成立“统筹方法研究室”之后，又补充了一批从山东大学和北京大学来的人员．但是，由于中国发生了“文化革命”，普及推广统筹方法的工作无法进行了．时间一天一天地过去了，直到 1970 年中国科大在林彪的“一号通令”驱赶下，被迫下迁合肥．1970 年 3 月 4 日，周恩来批示保护华罗庚，明确指示华罗庚“已不适合再随科大去“五七”干校或迁外地，最好以人大常委身份留他住京，试验他所主张的数学统筹方法”．华罗庚对周恩来的感激之情是难以用语言表达的．有了总理批示，华罗庚不但可以不去合肥，而且又可以试验统筹方法了．当时未去合肥上班的陈德泉、计雷也就正式地（不是临时地）留了下来，继续跟随华罗庚搞普及推广工作．1970 年夏天，华罗庚一行在上海继续试验统筹方法，同时试验优选法．

这次试点，虽然中国科大原来跟随华罗庚一起搞试点的人，除陈德泉、计雷外，都被迫在安徽各农场、厂矿接受再教育，不能去上海参加第三次试点，但是由于这次试点选题上更“对路”，所以成效更显著．特别是优选法，虽然这是第一次试点，但很“对路”，几乎是每个选题都见效．这就奠定了进行大规模普及推广“双法”的基础．

华罗庚前后共进行了三次普及数学方法的试点．从组织队伍上讲，第一次参加者最多，30 多人；第二次次之，10 多人；第三次最少，仅三人．从效果上讲，第一次最差；第二次良好；第三次最好．从条件上讲，三次也不同：第一次条件最好，中国科大很重视，做了正式的决定，774 厂也提供最好的配合．地点也舒适就在北京．第二次条件差些，西南成昆铁路正在修建过程，物资供应也差，高山峻岭，行走都不方便，何况修一公里铁路平均要牺牲若干名铁道兵战士．好在铁道兵官兵积极支持，关心照

顾大家．第三次条件困难得很，说起来地点在上海，中国最大的工业城市，可是那时是在“文革”期间，上海造反派头头不欢迎华罗庚在上海搞科学试验，还制造种种人为困难．好在工厂的工人和技术人员支持，他们支持华罗庚搞统筹方法工作，也支持华罗庚带来的另一项数学技术——优选法的试点．华罗庚很看重在上海的试点，因为第一次在北京试点（在城市），基本失败．第二次在西南试点（边远山区），成功了．所以，这第三次在（城市）上海试点，具有重大意义．它的成败非同小可，而且这次试点增加了优选法的新技术，任务重，对今后的普及推广数学方法的影响重大．事实证明了这一点．

§5.6 普及推广

到第三次试点成功时，统筹方法的应用面比在西南试点成功时的应用面要广，更重要的是此时优选法获得了第一次试点成功．

华罗庚等在上海进行优选法试点时，每次试验都很成功，而且花费时间短，效果显著．华罗庚看出了用优选法去解决生产工艺方面的优化问题，是很有前途的．这种问题到处都有，特别在化工、电子工业等部门，它比统筹方法——解决组织管理方面的优化技术，更易于普及推广．他心中已形成这样的想法：今后普及推广工作应该以普及推广优选法为主．

华罗庚等回到北京后，又在化学工业部门和电子工业部门普及优选法，继续获取普及的经验和成果，到 1972 年夏天，大约一年半时间，取得成百项成果．在此期间，国务院曾召集 17 个部委开会，请华罗庚做报告，介绍“双法”．会上还安排北京市化工和电子部门介绍普及“双法”的经验与取得成果．会后，许多地方与部门纷纷表示要请华罗庚去他们那里普及“双法”．

1972 年下半年开始，经过一段时间的准备，华罗庚组建了以他为首的普及“双法”小分队．从此，华罗庚开始步入全国各

省市或自治区普及“双法”的群众运动. 后来，华罗庚总结曰：“我从事‘优选法’与‘统筹法’推广工作的近20年中，走遍了我国20多个省市或自治区，几百个城市，几千个工厂，给数以百万计的工人师傅、技术人员与厂矿领导讲过课. 从事推广工作的过程，对我来说，首先是一个学习过程，工厂的工人师傅、技术人员与领导干部教给我生产与管理知识，然后我们共同研究，共同设法运用数学方法以改进生产与管理水平.”

普及“双法”小分队，每到一个省，立即到该省的一个工厂或矿山去，把省内外来的大约200多人集中在一起，举办一周左右的训练班. 训练班在此一周内，一方面学习“双法”的基本内容，大约三四次；另一方面分小组研讨. 研讨的内容是如何将“双法”应用于各人自己的工作或自己工作部门的生产中去. 一周以后，大家分别奔赴全省各重要工业部门与厂矿. 他们与各个工作点的领导、技术人员和工人一起讨论问题，制定解决问题的方案，然后实施之. 在这个过程中，华罗庚则轮流到全省各地各主要城市、工厂中去实地考察，及时了解一些成功经验与失败教训. 到一定火候时，召集在全省各地、各城市普及“双法”的代表，到某一个做出突出成绩的厂矿，召开“现场会”，学习他们有益的经验，以促进普及工作的开展. 这样从一开始就用已有的案例办训练班，训练班不但传授理论更重要的是传授案例，然后在案例启发下对具体问题进行试验，以便形成新案例. 再以新案例为内容召开现场会，以推动普及工作的开展. 华罗庚在70年代初就采用了案例教学法，而且他把案例教学法贯穿在普及“双法”的全过程. 这种以案例为主的教学法与要解决的实际问题紧密地结合在一起的实践，比国外著名大学提倡案例教学早十多年. 这种行业内部一浪逐一浪，行业之间一个部门推动另一部门、一个地区带动另一个地区生动活泼的普及数学方法活动，别开生面，形成了特殊风格.

华罗庚在面向大众的普及数学工作中的创新点，在第七章我们还要提到，他给大家显示了应用数学工作即使在普及阶段也跟

纯粹数学一样，需要高智力的创造.

普及推广“双法”形成了成千上万人参加的群众运动. 它不只在华罗庚亲自带领的小分队所到之省市，普及工作席卷全省各个角落，遍地开花，而且在全国各地，在华罗庚的影响下，各大专院校的数学系和数学研究所，也组织了类似的小型普及推广小分队，在他们所能涉足的有关部门进行普及“双法”工作. 许多高等院校把这种普及工作视为学校教育革命的一部分. 中国科学技术大学更是如此. 华罗庚在该校数学系的学生虽然受到严格控制，不许离校参加他的普及“双法”小分队，但是他们把在校毕业班的学生组织起来，下厂搞教育革命并同时普及“双法”工作. 龚昇、杨德庄、陆洪文等还到过当时允许去的西安三机部工厂，普及推广“双法”.

这些全国各地的小型小分队，普及“双法”工作，也是一浪推一浪地前进，成效不错.

第六章　近似分析与统计

§6.1　二维求积公式

命 $f(x)=f(x_1,\cdots,x_s)$为一个周期函数，每一个变数都有周期 1 且有 Fourier 展开式

$$f(x)=\sum_{-\infty}^{\infty}C(m)e^{2\pi i(m,x)}$$
$$=\sum_{m_1=-\infty}^{\infty}\cdots\sum_{m_s=-\infty}^{\infty}C(m_1,\cdots,m_s)e^{2\pi i(m_1x_1+\cdots+m_sx_s)},$$

此处 $|C(m)|\leqslant C\|m\|^{-\alpha}$，其中 $\alpha>1$，$\|m\|=\bar{m}_1\cdots\bar{m}_s$ 及 $\bar{m}=\max(1,|m|)$，满足上述条件的函数构成的函数类记为 $E_s^\alpha(C)$，命$\{F_n\}$为 L. P. Fibonacci 贯，即由递推公式 $F_0=F_1=1,F_{n+2}=F_{n+1}+F_n(n\geqslant 0)$定义的整数贯，华罗庚与王元在 1960 年证明了

定理 6.1　命 n 为一个整数$\geqslant 3$，则

$$\sup_{f\in E_2^\alpha(C)}\left|\int_0^1\int_0^1 f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\frac{1}{F_n}\sum_{k=1}^{F_n}f\left(\frac{k}{F_n},\frac{F_{n-1}k}{F_n}\right)\right|$$
$$\leqslant C\cdot c(\alpha)F_n^{-\alpha}\log F_n,$$

此处 $c(\alpha)$为仅依赖于 α 的正常数，不同地方可以取不同值.

在证明定理 6.1 之前，先证明次之引理：

引理 6.2　对于任意正整数 n,a_1,a_2，此处$(a_i,n)=1(i=1,2)$，皆有

$$\sup_{f\in E_2^\alpha(C)}\left|\int_0^1\int_0^1 f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{a_1k}{n},\frac{a_2k}{n}\right)\right|$$
$$\leqslant C(\Lambda(a_1,a_2)+C(\alpha)n^{-\alpha}),$$

此处

$$\Lambda(a_1,a_2)=\sum_{\substack{a_1m_1+a_2m_2\equiv 0(\bmod n)\\ -n/2<m_i\leqslant n/2}}{}'\frac{1}{(\bar{m}_1\bar{m}_2)^{\alpha}},$$

其中 $\sum'$ 表示去掉 $m_1=m_2=0$ 一项.

证

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{a_1k}{n},\frac{a_2k}{n}\right)\\
&=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sum_{m_1=-\infty}^{\infty}\sum_{m_2=-\infty}^{\infty}C(m_1,m_2)\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}(a_1m_1+a_2m_2)k/n}\\
&=C(0,0)+\sum_{a_1m_1+a_2m_2\equiv 0(\bmod n)}{}'C(m_1,m_2),
\end{aligned}$$

其中

$$C(0,0)=\int_0^1\int_0^1 f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

由 Fourier 系数的假定易得引理之结论.

定理 6.1 的证明,首先估计和

$$\Lambda(1,F_{n-1})=\sum_{\substack{m_1+F_{n-1}m_2\equiv 0(\bmod F_n)\\ -F_n/2<m_i\leqslant F_n/2}}{}'\frac{1}{(\bar{m}_1\bar{m}_2)^{\alpha}}.$$

显然 $m_2\neq 0$,否则由 $F_n|m_1$ 与 $-F_n/2<m_1\leqslant F_n/2$ 可知 $m_1=0$,此为矛盾,任给 m_2,则 $m_1=yF_n-F_{n-1}m_2$,其中 y 为满足

$$-\frac{1}{2}<y-\frac{F_{n-1}}{F_n}m_2\leqslant\frac{1}{2}$$

之整数,因此

$$\begin{aligned}
\Lambda(1,F_{n-1})&\leqslant 2\sum_{1\leqslant x\leqslant F_n/2}(\bar{x}(\overline{F_{n-1}x-F_ny}))^{-\alpha}\\
&\leqslant 2\sum_{m=2}^{n-1}J_m,
\end{aligned}$$

其中

$$J_m=\sum_{F_{m-1}\leqslant x<F_m}(\bar{x}(\overline{F_{n-1}x-F_ny}))^{-\alpha}.$$

由于 F_{n-1}/F_n 是$\omega=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$的渐近分数,所以由连分数的简单性质可以估出

$$J_m \leqslant C(\alpha)F_n^{-\alpha},$$

故得定理.

§6.2 分圆域与近似分析

黄金数 $\omega=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$在丢番图逼近中有其特殊的地位,$F_{n-1}/F_n$是$\omega$ 的渐近分数且满足

$$\left|\frac{F_{n-1}}{F_n}-\omega\right|<\frac{1}{\sqrt{5}F_n^2}$$

所以如果要将上节所述的方法推广至 $s>2$ 的情况,首先要推广黄金数 ω 与 Fibonacci 贯$\{F_n\}$.

由于 $\omega=2\cos\frac{2\pi}{5}$及$\{1,\omega\}$构成分圆域 $R_2=Q\left(2\cos\frac{2\pi}{5}\right)$的基底,所以将 ω 推广为

$$\omega_j=2\cos\frac{2\pi j}{m},\quad 1\leqslant j\leqslant s-1,$$

其中 m 为一个整数$\geqslant 5$,$s=\varphi(m)/2$. 集合$\{1,\omega_j(1\leqslant j\leqslant s-1)\}$是 s 次分圆域$R_s=Q\left(2\cos\frac{2\pi}{m}\right)$的基底.

考虑到 ω 是R_2 的单位,于是从 R_s 的一组独立单位出发,可得一个单位贯:

$$\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_l,\cdots$$

满足

$$|\eta_l^{(i)}|\ll\eta_l^{-\frac{1}{s-1}},\quad 2\leqslant i\leqslant s,\quad \eta_l>l,$$

其中 $\eta_l^{(i)}(2\leqslant i\leqslant s)$表示 $\eta_l=\eta_l^{(1)}$ 的共轭,再由

$$[\eta_l]=n,[\eta_l\omega_j]=h_j\quad(1\leqslant j\leqslant s-1)$$

即得整数矢量

$$(n,\quad h_1,\cdots,h_{s-1})$$

满足有最佳逼近阶的联立有理逼近：

$$\left|\omega_j-\frac{h_j}{n}\right|=O(n^{-1-\frac{1}{s-1}}),\quad 1\leqslant j\leqslant s-1.$$

于是得伪随机数列

$$\left(\frac{k}{n},\left\{\frac{h_1k}{n}\right\},\cdots,\left\{\frac{h_{s-1}k}{n}\right\}\right),\quad 1\leqslant k\leqslant n.$$

而且可以证明下面的求积公式：

$$\begin{aligned}\sup_{f\in E_s^a(C)}&\left|\int_0^1\cdots\int_0^1 f(x_1,\cdots,x_s)\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_s\right.\\&\left.-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n},\frac{h_1k}{n},\cdots,\frac{h_{s-1}k}{n}\right)\right|\\&=O(C\cdot n^{-\frac{a}{2}-\frac{a}{2(s-1)}+\epsilon}),\end{aligned}$$

此处 $\epsilon>0$ 及与 O 有关的常数仅依赖于 ϵ 及 $Q\left(2\cos\frac{2\pi}{m}\right)$.

这一方法在国际上被称为华-王方法，伪随机数列不仅可以用于数值积分，还可以用于插值法，微分方程与积分方程的数值求解等问题.

§6.3 评论之十四(那夫卡)

这本书对于近似分析中的数论方法来说，无疑是首次与独一的奉献. 在解析数论中，分析学被用来处理数论问题，在此则反方向也成立了. 本书主要致力于多重积分问题，其中积分区域又主要是单位立方体. 被积函数则可以由其周期性而延拓至整个空间. 从而函数可以由 Fourier 级数表示出来. 关于被积函数的假定是非常一般的. 数论方法的想法是：不用 Riemann 和，而用一个函数值的和来代替积分，即在一个“最佳可能”的预先选好的点集上来计算函数值之和，从而使一大类函数 f 的近似积分误差阶变得很小，其中用于计算的点集的选取需使它们在单位立

方体 E 中分布得尽量地均匀．解析数论，代数数论，特别是 H. Weyl 建立起来的一致分布理论引导着我们如何去处理这种问题．例如使某种三角和（Weyl 和）的模尽可能地小．计算用的点集的选取方法不是唯一确定的，所以，人们发展了几种不同的方法．作者则运用代数数论来处理这个问题．

本书的第一与第二章讲述了所需的代数数论知识，特别是分圆域，还有由逐次二次扩张构成的域，本书称之为 Dirichlet 域，然后按照 L. Bernstein 的办法研究了 Pisot 理论与 Jacobi 算法．

第三章讲述了一致分布理论与偏差概念．第四章介绍了几种估计偏差的办法并研究了好点集与好格子点集．

第五—七章研究了由 Korobov 与评论者建立的函数类．第八章处理了误差估计问题并将结果列于一些表格之中．第九章研究了多变数函数的插值法．

第十章包含着这一方法对积分与微分方程的应用．附录中则包含了一系列表格．

本书末附有参考文献．本书的表达特别细致；所有计算的细节都给出来了，读者仅需的预备知识为初等数论．本书所需的解析数论知识都作了完整的讲述，从而使本书有了很高的可读性．

（见 E. Hlawka,"L. K. Hua and Y. Wang, Applications of Number Theory to Numerical Analysis, Springer-Verlag and Science Press, 1981", Zentralblatt für Mathematik, 1982. 王元译）

§6.4　评论之十五（革罗斯瓦尔德）

数论有什么用处呢？谁也不怀疑，许多数学分支之所以存在，应该归功于“现实世界”提出的问题，例如物理学、工程技术等提出的问题．熟知的例子有微积分，还有天体力学中需要的微分方程理论，以及流体力学中必不可少的偏微分方程，等等．但是，数论怎样呢？数论专家们为了应付我们第一个问题（通常是非数学家提出来的），往往感到必须使提问人相信数论也可以

是有用的．有时提出数论在结晶学问题上的应用，近来还提到在密码学上的应用．为什么一定要指出数论在常识意义下的某种“用处”呢？这个问题也是本评论员百思不得其解的．有一点看来是确凿无疑的，就是 Diophantus，Fermat 和 Gauss 都是出自数论内在的趣味及其特有的美而研究人类知识的这一领域的：他们确实毫不在乎他们那些优美的定理是否会有什么“有用的”应用．

尽管如此，像“最纯粹的”数学家发展起来的许多别的数学分支一样，原来数论也有自身以外的应用．除了密码学以及物理学中有关格子点的若干问题(结晶学问题就是其中之一，理想气体的研究是又一问题，见[2])外，还可以举出数论的许多应用，例如计算机理论(见[9，第 2 卷])，随机数的产生(见[15]或[4])，等等．

Zaremba 编辑的著作［23］以及华罗庚、王元所著本书，这两种较近的出版物使人们注意到数论应用又一个广阔的天地，即是数值分析．

现在，数论专家如果感到有必要以数论的“用处”向世人说明应该喜爱这一领域，他就可以理直气壮地提出的确需要[23]和华罗庚、王元著作中的那种精深奥妙的数论，还可以举出 Knuth 的《计算机程序编制技巧》[9]以及 Dieter 的若干文章（例如见［23，第 287—317 页］和［5]），等等．

Zaremba 编辑的文集在相当广泛的意义下讨论了数论对数值分析的应用，而华罗庚、王元的著作却全力以赴地只讨论一个主要问题，即是多重积分的数值计算，实际上，本书十章中前八章是专讲这个问题的，只是最后两章才讨论别的问题（插值法、积分方程和微分方程）．数值积分几乎和积分一样源远流长，某些经典的多项式插值公式应该归功于牛顿；事实上，牛顿本人(在 1676 年，例如见[10，第 23 页])就曾利用这些公式对定积分进行近似计算．较为著名而精确的“机械积分”(直到晚近习惯上还称为数值积分，特别是单变数积分，例如见[10]和[16])公式，有 Simpson，Weddle，Stirling，Bessel，Lagrange 以及 Gauss 等人的

公式．这些公式尽管原来只是就单积分设计出来的，但不久就通过迭代法用来计算二重积分了．不过，对于涉及这些公式的最重要的问题，即估计最大误差项问题，数论却几乎不起任何作用；这种估计是用分析方法得到的．

求积分式的主要思想，是把积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 换成有限和 $\sum_{n=0}^{k} a_n f(x_n)$，$a=x_0<x_1<\cdots<x_k=b$，$a_n$ 不依赖于 f，使得误差项的大小

$$R_k(f)=\left|\int_a^b f(x)dx-\sum_{n=0}^{k} a_n f(x_n)\right|$$

尽可能小，这里 f 是某已知函数类的任何函数(例如有界变差函数,连续函数,二次可微函数,等等)．

在许多公式中,点 x_n 不过是把区间 $[a,b]$ 分成 k 个相等部分而得到的．可是,在 Gauss 公式中,如果考虑标准区间 $[-1,+1]$,则诸 x_n 是第 n 个 Legendre 多项式的零点．Gauss 证明:就同样的计算量(例如,由所用项数及精度估计)而言,适当选择分点可以使结果得到可观的改进．

这点说明可以看成是许多未来发展的出发点．事实上,我们有下述问题:我们能否选取计算被积函数的诸点,使得最少量的这种函数值,也许加上适当权数,其平均值将给出单位区间上的积分值,误差最小？其次,这种方法能否用于任意有限维欧氏空间？这第二个问题是很不简单的．其实,任何单变数积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$，都可以利用该变数的简单线性变换化为标准单位区间 $[0,1]$ 上的积分．可是,即使就二维而言,情况也不再如此:并非每条简单闭曲线,即使是凸曲线,都能由相似变换和刚性运动变成单位正方形．高维情形问题更加困难,尤其是非凸区域的情形,可是,即使就这些情形而言,Riemann 积分的定义本身也表明,如果我们求一个适当光滑函数的平均值,取值点充分多,充分规则地分布在形状相当任意的单位体积的区域上,那么我们应该得到这个函数在已知区

域上的积分的一个好的近似值.

由于电子计算机的出现,现在有可能使这种方法得到落实.点的选择加进了随机因素,使这种方法获得 Monte Carlo* 方法的名称. Monte Carlo 方法取得过一些成绩,但很快就看出了它的局限性.人们再一次认识到,适当选点可以使结果得到改进.这个想法是 Korobov(见[11],[12]和[13])20 多年前实现的,Hlawka 也独立地、几乎同时认识到这一点[8].这些事件标志着把数论彻底应用于数值分析的开始.以后不久,Conroy 也是独立地利用一种类似的方法来估计物理化学中出现的一个多重积分(见[3]).今天,Korobov 原来称为**最优系数法**的这一方法,通常叫做**良格点**(g.l.p.)方法.

这个方法的主要思想如下.如前,要求积分 $\int_0^1\cdots\int_0^1 f(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x}$ 的有限和逼近,这里,$\boldsymbol{x}=(x_1,\cdots,x_s)$ 是 s 维欧氏空间的向量,$\mathrm{d}\boldsymbol{x}=\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_s$.如果假设 $f(\boldsymbol{x})$ 对于它的 s 个变数的每一个都是周期为 1 的周期函数,那么方法的精确度将得到很大的提高.这就是说,该函数有一个多重 Fourier 级数 $f(\boldsymbol{x})=\sum\limits_{\boldsymbol{m}}C(\boldsymbol{m})e^{2\pi i(\boldsymbol{x},\boldsymbol{m})}$,这里 $\boldsymbol{m}$ 通过 s 维空间中所有整数向量,$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{m})=\sum\limits_{i=1}^{s}x_im_i$ 是内积.在这些条件下,我们考虑形如 $n^{-1}\sum\limits_{r=1}^{n}f(r\boldsymbol{\alpha}/n)$ 的和式. Korobov 和 Hlawka 都证明:可以选取向量 $\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}(n)$,使得对某个函数类的所有函数 f 有

$$\left|\int_0^1\cdots\int_0^1 f(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x}-\frac{1}{n}\sum_{r=1}^{n}f\left(\frac{r}{n}\boldsymbol{\alpha}\right)\right|\leqslant Cn^{-\alpha}(\log n)^{\beta},$$

这里 C 是绝对常数(就已知函数类而言),α 依赖于这些函数的光滑程度.向量 $\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}(n)$ 必须按照某种(不唯一确定的)方法选取,

---

* 摩纳哥,城市名,为世界著名赌城,因此与随机抽样有关的方法多借用此名.——译注

使得 Diophantus 方程

$$(*)\qquad (\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{m})\equiv 0 (\bmod n),\boldsymbol{m}\neq 0.$$

不会有“小”解 $\boldsymbol{m}=(m_1,\cdots,m_s)$. 特别是,若令 $\bar{m}_i=\max(1,|m_i|)$,则要求对$(*)$所有的解 $\boldsymbol{m}$ 而言,$\|\boldsymbol{m}\|=\prod_{i=1}^{s}\bar{m}_i$ 应超过某个下界(例如见本书引理 3.9). 我们一旦决定了选取 $\boldsymbol{\alpha}$ 作为 n 的函数的方法,就可以利用 α 的值算出 β. 显然,取 n 相继增大,我们可以把误差降低到任何事先指定的界限以下,但是对每个新的 n,必须重新计算 $\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}(n)$,这是整个过程中最费时间的部分. 按照用来确定 $\boldsymbol{\alpha}$ 的方法,两位作者定义了 p 点,良点(g. p.)以及良格点(g. l. p.). 就本评论的目的而言,我们基本上不管这些区别.

虽然有一个定理说,良点集的测度是 1,但实际造出哪怕一个良点也不是轻而易举的事(见 Baker[1],Schmidt[17],[18]). Korobov, Zaremba[19,21],Halton[7]以及其他人都提出了省劲的构造 g. l. p. 的方法,但是对于这个课题最重要的贡献之一应该归功于本书的两位作者.(顺便说说,他们定义 g. l. p. 的方式与以前的作者们稍有不同.)

这个问题一旦解决,就应该把结果推广到两个方向:(a)考虑周期不为 1 的周期函数;(b)考虑不是 s 维方体的区域. 处理问题(a)至少已经提出了三种方法;最简单的大概是令 $F(x)=\frac{1}{2}\{f(x)+f(1-x)\}$,这时 $F(0)=F(1)$,$F(x)$在$[0,1]$之外可以按周期性定义为连续函数. 此外,显然可见 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1 F(x)\mathrm{d}x$,以前的方法适用于后一积分. 推广到 s 个变数的情形当然是直截了当的. 为了克服没有周期性而提出的另一些方法,有变数代换以及利用 Bernoulli 多项式(除了本书以外,亦见[6]). 至于问题(b),所提出的解决办法也许不完全令人满意. 一个明显的方法是引进集 S 的特征函数:若 $\boldsymbol{x}\in S$,令 $\chi(\boldsymbol{x})=1$. 否则令 $\chi(\boldsymbol{x})=0$.

于是，若 $S\subset G_s$（$G_s=s$ 维单位方体），我们可以把前面的方法用于 $F(x)=\chi(x)f(x)$，并在 G_s 上积分．不幸，$\chi(x)$（因而 $F(x)$）根本不是光滑的，事实上甚至不连续，一般说来，$F(x)$ 并不属于 $f(x)$ 所在的类．我们可以要么把 $F(x)$ 搞光滑，要么利用别的办法．这里，迷向偏差（见[20]）的概念起着重要作用，但不可能加以讨论了．

华罗庚、王元的这本书对这些以及有关的问题做了非常细致的处理．本书最引人注目的面貌，也许是大量介绍并利用代数数论的知识．十章中有一半以上（第1,2,3章，第4章大部，第5章的一半以及整个第6章）是专讲基本数论的．

本书首先彻底讨论了代数数域及其单位元，接着研究了某些对称函数．其次，引进了PV（Pisot-Vijayaraghavan）数（代数整数 $\alpha>1$，如果它的所有共轭代数数满足 $|\alpha^{(i)}|<1$，则 α 是PV数）．介绍了模1均匀分布（但是H. Weyl的名字只在第3章末尾的一条注释中才提到）．证明了Vinogradov的一个有关的定理，定义了各种类型的偏差，进行了比较．这里对Van der Corput，Hammersley，Halton，Hlawka，Zaremba，Niederreiter以及W. Schmidt的工作做了评述，同时还提到Korobov，两位作者自己，Khintchine以及Bahvalov的工作．

因为点集偏差的概念非常重要，让我们回想一下它的定义．让 $P_n(\kappa)=(x_1^{(n)}(\kappa),\cdots,x_s^{(n)}(\kappa))$，$1\leqslant\kappa\leqslant n$，是 s 维单位方体 G_s 中的 n 个点，用 $\gamma=(\gamma_1,\cdots,\gamma_s)$ 表示 G_s 中任何固定的点，命 $|\gamma|=\gamma_1\gamma_2\cdots\gamma_s$，让 $N_n(\gamma)$ 表示点集 $\{P_n(\kappa)(1\leqslant\kappa\leqslant n)\}$ 中满足不等式 $0\leqslant x_i^{(n)}(\kappa)<\gamma(1\leqslant i\leqslant s)$ 的点的个数．于是，

$$\sup_{\gamma\in G_s}\left|\frac{1}{n}N_n(\gamma)-|\gamma|\right|=D(n)$$

称为点集 $\{P_n(\kappa)\}$ 的**偏差**．如果我们有整数 n_i 组成的单增序列，那么可以对每个整数计算 $D(n_i)$．如果 $\lim\limits_{n\to\infty}D(n_i)=0$，则集序列 $\{P_{n_i}(\kappa)\}(i=1,2,\cdots)$ 称为在 G_s 中是**均匀分布的**．

本书接着研究了有理逼近以及 Diophantus 方程和方程组的解的个数.

上述理论上的准备工作(在第4章末尾)用来计算几个点集的偏差,这些点要么是 g.p.,要么是 g.l.p.这里,两位作者自己的贡献起着突出的作用(利用 PV 数以及广义 Fibonacci 数,后者定义为 $F_j=0,j=0,1,\cdots,s-2;F_{s-1}=1;F_n=\sum_{k=1}^{s}F_{n-k},n\geqslant s$).

考虑了有关均匀分布的某些问题,定义并研究了在 Hardy 和 Krause 意义下的有界变差函数(按照这种行文脉络,这些问题已由 Zaremba[22]讨论过了).

命$\{P_n(\kappa)(1\leqslant\kappa\leqslant n)\}$是偏差为 $D(n)$的任何点集.于是,若 $f(x)$是有界变差函数(以下总是取 Hardy 和 Krause 的意义),全变差为 $V(f)$,这里 $f(x)$不必是周期函数,则可证

$$\left|\int_{G_s}f(x)\mathrm{d}x-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f(P_n(\kappa))\right|\leqslant V(f)D(n).$$

这个基本不等式的证明很不简单,但有详尽的叙述.

为了推出有用的求积公式,点 $P_n(\kappa)$必须满足两个要求:(1)这些点的偏差必须很小(即是应该尽可能分布规则);(2)这些点应该容易计算.

两位作者列举了大约15个求积公式,每个公式都给出了误差上界.此外,对于 G_s 中任何已知的$P_n(\kappa)$,两位作者构造了一个函数 $f(x)\in C^\alpha,\alpha=q+\lambda$(即是 $f(x)$具有直到 q 阶的连续导数,而 q 阶导数不再可微,但满足 λ 阶 Lipschitz 条件),使得

$$\left|\int_{G_s}f(x)\mathrm{d}x-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f(P_n(\kappa))\right|>c(q,\lambda,s)n^{-\alpha/s}.$$

这就表明,不论点 $P_n(\kappa)$选得多么好,这些求积公式的精确度总有一个限度,我们不可能指望使这些公式的改进超出这个限度,至少只要我们对函数 $f(x)$只提出光滑性假设而不提周期性假设就是这样.

这时,引进了周期函数,定义范数 $\|f^\alpha\|$,若 $f(x)=$

$\sum_m C(\boldsymbol{m})e^{2\pi i(\boldsymbol{m},x)}$，$|c(\boldsymbol{m})|\leqslant c/\|\boldsymbol{m}\|^{a}$，则 $f(\boldsymbol{x})$ 称为属于类 $E_s^a(C)$；还定义了另外两个函数类 $Q_s^a(C)$和 $H_s^a(C)$. 这些类满足包含关系 $H_s^a(C)\subset Q_s^a(C)\subset E_s^a(2^sC)$，但这里不给出更确切的定义了. 对于这些类中的函数，可以得到比对非周期函数更精确的求积公式. 因此，把非周期函数化为周期函数是有意义的，介绍了前面提到的进行这种转化的三种方法. 最后，对于所定义的三类函数，把 $P_n(\kappa)$取作 p 点，良点或良格点，分别介绍了周期函数的数值积分. 估计误差项的下界可以证明：误差的上界往往具有正确的数量级，所以一般说来（即是对于所在类中特别坏的函数而言），误差不可能进一步改进. 下述可能性（实际上是很可能成立的推测）仍然悬而未决：就绝大多数被积函数而言，误差比所得到的保守的理论上界小得多.

整个一章（第 8 章）介绍了数值工作，特别是，用几种方法计算了 g. p. 和 g. l. p.，对这些点产生的误差界限进行了相互比较，并且同具体的数值例子中的实际误差进行比较. 本书中，广义 Fibonacci 数特别有用. 此外，对运算次数和计算时间也做了估计，并且与可达到的精确度联系起来. 本书频繁引用发表在 Zaremba 编的文集 [23] 中的几篇文章，至少有很长一段是逐字引用. 附录中解释并讨论了几个数值表. 还提出了几个猜测，大意是说，所得到的结果大概胜过了利用对最坏误差项的现有估计实际上所能证明的东西. 最后，前面曾经提到过，最后两章就以前定义的函数类讨论了插值法，也分别讨论了微分方程和积分方程（Fredholm 型及 Volterra 型）的数值解.

本书的价值和用处是毫无疑义的，就完备而系统地介绍这一重要而有趣的题材而言，本书大概是唯一可以见到的著作.

使人感到遗憾的是，某些本可避免的不足之处使本书不易阅读，有时实际上是杀风景：本书没有索引；翻译偶尔不当（例如见第 27 页第 3—5 行）；校读似乎不够细心，实际上有很多印刷错误，有些错误是读者易于改正的，但有些则使人不知所措（例如，定理 1.1 中的指数 r_i 应该是 γ_i）；人名往往拼错（第 39 页

最后一行应为 Minkowski；第 99 页第 12 行应为 Hardy；Korobov 拼错几次，有时（第 86 页第 9 行）拼作 Kopobov，这使人想到是译自俄文而不是译自中文）；有一节的标题是“The Halton Theorem”，但这一节有好几个定理，Halton 定理不知道指哪一个；某些术语的意义与通常的意义不同（一个多项式方程诸根的 i 次幂之和称为初等对称函数）；符号往往不加定义，间或容易猜出符号的意义，例如定理 3.2 的 $\{x\}$ 表示 x 的分数部分，但有时，例如第 60 页上的 $\langle x\rangle$，读者可能首先想到定理 1.5 中定义的那个类似的符号，那里的意思是指 x 所产生的群，这个猜测当然不对，侥幸知道 Kuipers 和 Niederreiter 的书[14]的读者，才会想到这个符号表示 x 到最近整数的距离；155 页第 6 行提到的定理 7.4 应该是定理 7.14，等等. 可以添加一些例子. 有的读者可能希望在阅读华罗庚、王元著作之前，或在阅读的同时补充研究［23］中收入的 S. Haber，S. K. Zaremba，D. Maisonneuve 以及 H. Niederreiter 等人的文章，这些文章在本书中全都引用了. Kuipers 和 Niederreiter 的著作[14]虽然只是讨论均匀分布问题，但该书的知识也可能有助于本书的阅读.

上述表面上的缺点在新版中是易于消除的，即便有这些不足，但华罗庚、王元的著作对于数值积分以及微分方程和积分方程的求解，仍然是最有价值的贡献. 本书包含了许多属于两位作者自己的材料，在很多情况下，所提出的方法都产生最精确的结果，而计算量最小，附录中的几个表本身就很有价值.

最后，就抽象的纯数论的实际用处而言，这本书本身就是一个光彩夺目的例证.

参 考 文 献

[1] A. Baker, On some Diophantine inequalities involving exponential functions, *Canad. J. Math.*, 17 (1965), 616—626.

[2] H. Baltes, P. K. Draxl and E. R. Hill, Quadratsummen und gewisse Randwertprobleme der mathematischen Physik, *J. Reine Angew. Math.*, 268/269(1974), 410—417.

[3] H. Conroy, Molecular Schrödinger equation VII: A new method for the evalution of mul-

tidimensional integrals, *J. Chem. Phys.*, **47** (1967), 5307—5318.

[4] U. Dieter, Autokorrelation multiplikativerzeugter Pseudo-Zufallszahlen, *Operations Research Verfahren*, **6** (1969), 69—85.

[5] U. Dieter and J. Ahren, An exact determination of serial correlation of pseudo-random numbers, *Numer. Math.*, **16** (1971), 101—123.

[6] S. Haber, Experiments in coefficients, see[23, pp. 11—37].

[7] H. Halton, On the efficiency of quasi-random sequences of points in evaluating multidimensional integral, *Numer. Math.*, **2** (1960), 84—90.

[8] E. Hlawka, Uniform distribution modulo 1 and numerical analysis, *Composito Math.*, **16** (1964), 92—105.

[9] D. H. Knuth, The art of computer programming (esp. Vol. 2), Addison-Wesley, Reading, Mass., 1969.

[10] Z. Kopal, Numerical analysis, Wiley, New York, 1955.

[11] N. M. Korobov, Approximate calculation of multiple integrals with the aid of methods in the theory of numbers, *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, **115** (1957), 1062—1065.

[12] ——, An approximate calculation of multiple integrals, *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, **124** (1959), 1207—1210.

[13] ——, Number-theoretic methods of approximate analysis, Fitmatgiz, Moscow, 1963.

[14] L. Kuipers and H. Niederreiter, Uniformdistribution of sequences, Wiley, 1974.

[15] D. H. Lehmer, Mathematical methods in large-scale computing units, Proc. Second Sympos. on Large-Scale Digital Calcul. Machinery, Harvard Univ, Press. Cambridge, Mass., 1949, pp. 141—146.

[16] K. J. Nielson, Methods in numerical analysis, Macmillan, New York, 1956.

[17] W. M. Schmidt, Simultaneous approximation of algebraic numbers by rationals, *Acta Math.*, **125** (1970), 189—201.

[18] ——Diophantine approximation, Lecture Notes in Math., Vol. 785, Springer-Verlag, Berlin and New York, 1980.

[19] S. K. Zaremba, Good Lattice points, discrepancy and numerical integration, *Ann. Mat. Pura Appl.*, **73** (1966), 293—317.

[20] ——, La discrépance isotope et l'intégration numérique, *Ann. Mat. Pura Appl.*, **87** (1970), 125—136.

[21] ——, La méthod des "bons treillis" pour Le calcul des intégrales multiples, see[23, pp. 39—116]

[22] ——, Some applications of multidimensional integration by parts, *Ann. Polon. Math.*, **21** (1968), 85—96.

[23] ——, (Editor), Applications of number theory to numerical analysis, Academic Press,

New York, 1972.

（见 E. Grosswald "L. K. Hua and Y. Wang, Applications of Number Theory to Numerical Analysis, Springer-Verlag and Science Press, 1981". Bull. Amer. Math. Soc.; 1983, 489—496. 江嘉禾译，卞冀校）

§6.5 统计中的数论方法

统计中一些问题的解决，常常需要用伪随机数列（即均匀散布点列）的小样本．方开泰与王元于 1981 年首先用数论方法找出了一批小样本，并用于试验设计问题．我们叙述一下最简单的试验设计：

假定有一个试验，共有 s 个因素，每个因素有 q 个等距离水平，则共有 q^s 种可能的 s 种因素的水平组合．不妨记为 x_{1j_1}，…，x_{sj_s}，$1\leqslant j_1$，…，$i_s\leqslant q$，作对应

$$x_{ji_j}\leftrightarrow\frac{i_j}{q},$$

则每一种组合 $\{x_{1j_1}, \cdots, x_{sj_s}\}$ 即对应于单位立方体 G_s 中的一个有理点 $(j_1/q, \cdots, j_s/q)$．用数论方法可以从这 q^s 个有理点中选出 $O(q)$ 个点构成的集合 U，它在 G_s 有较小的偏差．我们在对应于 U 的点的组合上做实验，然后根据试验结果，再用回归分析方法求得较好的因素水平组合．我们称这个方法为均匀设计．这比普通的正交设计所需要的试验次数 $O(q^2)$ 有较大地减少．我们当然可以根据立方体的一个小样本（不一定是有理点）来确定一个实验的每个因素应取的水平值并安排试验——样本中的每一点对应一个试验．均匀设计在我国的工业生产与科学实验中，取得了很好的应用与成果．

将数论方法用于统计问题时，常常还需要其他区域中的小样本，最常见的是球，球面与单纯形．例如混料试验设计即对应于在下面区域中找一个小样本：

$$T_{s-1}(a, b) = \{x : x_1 + \cdots + x_s = 1, a_i \leqslant x_i \leqslant b_i, 1 \leqslant i \leqslant s\},$$

此处 $a_i \geqslant 0$，$1 \leqslant i \leqslant s$，$\sum_{i=1}^{s} a_i < 1$ 及 $\sum_{i=1}^{s} b_i > 1$.

概率与矩的计算实际上就是近似计算多重积分. 数论方法还可以用于统计中的最优化问题，多元分布代表点的寻求问题及统计推断问题等.

方开泰与王元将他们的成果系统地总结成一本专著(见§6.6之评论). 这项工作已引起国际统计界的关注. 方开泰与王元应邀为"统计科学百科全书"撰写一个长达七页的条目，系统地阐述了他们的方法(见"Number Theoretic Methods", Encyclopedia of Statistical Sciences, Vol. 2, John Wiley & Sons Inc.). 追本溯源，若无华罗庚对近似分析中数论方法的倡导与工作，很难设想这项工作能在中国这样快地发展起来，所以也应该部分地归功于华罗庚.

§6.6 评论之十六 (吉尼巴)

熟知的 Monte Carlo 方法的收敛速度是很慢的. 如果我们用确定的方法，"均匀"地布点，则收敛速度可以大幅度地提高. 本专著给出了寻找一个在 s 维单位立方体上均匀散布确定性点集的方法，并阐述了如何在众多的统计问题上用这些点来替代 Monte Carlo 方法. 这一方法的应用包含多重积分的近似计算、最优化问题、非线性模型的选取、最大似然估计、试验设计、多元分布代表点的计算、稳健推断、正态性与球性检验及投影追踪.

尽管我只看了书名而未看它的内容，我就已经喜欢这本书了. 这是第一步试图将许多年来有价值的研究用书的形式固定下来，毫不奇怪，本书留下了许多无序之处，有待于作进一步的研究.

度量一个点集的均匀度有许多途径，作者在第一章里提到了其中的几种，特别将表示点集的经验分布与均匀分布的距离（他们称为偏差）的 Kolmogorov-Smirnov（K－S）统计量提了出来使用．当 $s \geqslant 2$ 时，要找到一个有最小偏差的点集来是非常困难的．诚如书名所示，数论方法可以帮助我们找到偏差渐近小的点集．按照 K－S 均匀性测度，Monte Carlo 点集并非均匀散布的．第一个使我感到惊奇的是当我读到当 $s \geqslant 2$ 时，等距离格子点集，即 R^s 中单位立体里按坐标等分的点集不是均匀散布的．按照他们均匀性的测度，等分格子点集将是“合格”的，为什么要取“极小极大”逼近来最小化 K－S 距离及为什么要取 $O(n^{-\frac{1}{2}})$作为距离递减的最低速率？本书并未对这两个问题作出应有的回答．

这就引起了我对于材料的主要关注之处：作者仅当计算多重积分的收敛速度及寻求函数的极大值时才运用了这个定义均匀散布点集的渐近准则．当处理只需要小数目的集合时，我就未能见到用那些难于计算的点．在书中(见§4.7)，作者潦草地写了这个问题的表面，而且在一些特例中，他们坚持用他们的数论网格点以取代用简单与直观的决定性格子点集的可能性．

我特别注意到第五章中关于试验设计（无限制模型）自然处理的方法．当统计设计一个试验时，选取试验条件均匀地散布在试验区域中——不会是这个情况，来构成方法的框架．则在一个很不幸的例 5.2 中，他们试图通过下面的步骤来完成他们的工作：试验的回报需考虑 6 个不同的变数，而每个变数又必需考虑 17（!）个不同的非等分的水平．对于这个问题来说，共有 17^6 个因素的水平组合．我们即使运用正交试验设计来处理这个问题，所需的 17^2 次试验亦嫌太多了．他们竟宣布用 R^6 中的一个 17 个点的数论网格来处理这个问题．他们忽略了水平不是等分布这样一个事实，从而他们想像中的网格在任何合理的测度之下都远非是均匀散布的．能够直观地感觉到的是他们忘记了每个因素有 17 个水平及需要从一个 2 或 3 水平的试验开始．当考虑到

有许多因素及多于 2 水平的小试验的时候，我宁愿坚持用等距离分布格点的子集，然后再用他们的均匀设计.

在计算多重积分及处理序贯最优化问题时，关于收敛速度问题，我们能够见到用数论方法与用 Monte Carlo 方法是有很大差异的. 当 $s=1$ 时，具有最小偏差的集合为 $[0, 1]$ 上的等距离分布. 这就是说，对 R 上的积分问题来说，他们的技巧非常接近于古典方法. 关于他们给出的高维（$s\geqslant 2$）积分的例子，我愿意看到数论方法是怎样与 Gauss 求积公式的重叠求积公式相比较的结果. 我同样感到应该有 Diaconis（1988）与 O'Hagan 关于 Bayesian 数值分布的文献. 另一方面，我很高兴地读到，在他们的方法中，作样品及其他离差约化是何等的重要，及他们指出了将 Monte Carlo 方法与数论网格相混合的可能性.

本书是自给自足的. 它只需要假定读者具备微积分及研究生的初级统计课程的基本知识. 除了基本的结果之外，本书中还充满了许多随意附带性的信息，这将有助于将他们的技巧拓广到 s 维单位立方体以外的许多紧致区域中去，并且包括了如何将他们的方法序贯地加以使用的建议，从而导致这些最优化问题中收敛速度进一步得到提高. 本书中还充满了许多多元分布的结果及当处理随机变数的特殊变换时的一些有用的结果. 每一章都附有习题，作为主要理论定理的补充. 但在正文中，未见到真正的数据集合.

我们感到遗憾的是在正文中有些令人心烦的事：位于轴上的点未作出任何的标记，两个完全不相干的东西用了相同的记号，不完整的表格，语句中缺少了动词，排印上的错误，语法的错误及错误定理与方程的征引. 喜欢科学严谨的人，将会对于不停地随意陈述，及缺乏正规的条件而感到不满意的. 在叙述统计模型的时候，未能将它们的误差结构指出来. 例如（第 124 页），他们甚至发生了$E(\log y)=\log E(y)$这样的错误.

尽管有着上述的缺点，我仍然认为这是一本有高度思想挑战性的书. 当我们谈到用非寻常的途径来生成决定性的均匀分布网

格的时候，读者的心里应该想到要生成 Monte Carlo 方法所需要的均匀随机数也决不是容易的事情．主要不同的地方在于生成随机数的程序存放在我们的工具箱中已经有了相当长的一段时间了．在日常生活中，必需要均匀散布决定性点集的生成器已经进入科学的活字典的时候，数论方法才能成为一个真正的替代方法．尽管有上述的不足之处，我仍然乐意于推荐这个新的材料，并且认为“统计中的数论方法”应该归入有价值的统计文库之中．

参 考 文 献

[1] P. Diaconis, Baetsian Numerical Analysis, in Statistical Decision Theory and Relatid Topics, N, Vol. 1 editid S. S. Gupta and J. Berger, Johy Wiley, New York, 1988, 163—175.

[2] A. Q. Hagan, Some Bayes Numerical Analysis, in Bayesian Statistics, Vol. Ⅳ, Bernardo, Amsterdam, North-Holland, 1992.

（见 Josep Ginebra, “K. T. Fang and Y. Wang, Number-Theoretic Methods in Statistics, Chapman and Hall, 1994”; J. of Amer. Sta. Asso.; Sept., 1995. 1134. 王元译）

第七章　数学普及

§7.1　概述

华罗庚的数学普及工作分成两类：一类是面向中学生的；另一类是面向大众的.

面向中学生的数学普及工作，始于1956年. 从1950年他回国时起，中国等待他做的事，实在太多了. 除了自己繁重的理论研究外，他要筹划和构建中科院数学研究所，数学所一批年青人需要他培养. 为什么在回国六年还处于极度繁忙的时候他要抽时间与精力，从事面向中学生的普及数学教育呢？之所以如此，这是因为它是他发展中国数学的长远战略中的一环. 事实上，早在40年代，华罗庚就清醒地认识到自己从事的数学研究工作，要抓住两个要点：一个是自己的研究工作，不论对个人还是对国家而言，创新是第一位的. 当时，他为了保持自己创新工作的独立性，不被归到国外某大数学家门下，宁肯推迟去美国访问的时间，待自己的一系列成果发表后才走. 从长远发展的战略考虑，他认为中华民族在数学上要有创新成就，就需要培养新人. 要培养新人，就要做数学普及工作，从对中学生普及数学做起，因为中学生是一个国家科技力量的未来.

另一个要点是自己掌握的数学知识要为国家、为民族服务，要把这些知识用各种方式应用于实际、传播给人民，其中包括用普及数学方法的方式. 而面向大众的普及数学，又是发展中国应用数学必经之第一步骤. 在他这种思维模式的框架里，面向大众的普及数学工作有着特殊的位置. 现在我们清楚地看到，在他为中国数学发展呕心沥血的整个过程中，他始终把创新放在首位，同时把人才培养和知识的应用、普及也放在非常重要的位置上.

这在他一生中，不论是在探索中国纯粹数学发展阶段，还是在探索中国应用数学发展阶段，都是这样做的.

面向中学生的普及数学工作，是围绕着举办中学生数学竞赛这个中心展开的. 华罗庚认为数学人才的培养要从幼苗抓起，从中学生抓起. 因此，他倡导举办中学生数学竞赛，用这种方式去激励中学生学习数学的热忱. 激励搞科学的热忱是非常重要的. 历史上许多著名科学家所以能攀登科学高峰，首先在于对科学研究怀着极大的热忱. 1998 年李远哲教授在台湾大学回答“目前台湾在科研方面能否做出大贡献”的问题时，说：“我觉得时间仍未成熟，原因有二：第一，年轻人从事科研、学术工作的热忱不够，低迷很多，……，而任何事情若缺少有心人去全力以赴，是无法开创新局面的，…….”李远哲教授也是把搞科研有没有热忱，是不是有心和全力以赴，看成是成功与否的首要因素. 在他看来激励这种热忱是多么重要，他所指的激励热忱是对年轻人而言的，而年轻人的科研热忱必须从小开始培养. 最近，朱棣文教授几次回国，非常关心祖国科技的发展，特别关心富有创造力的人才培养，他说：“创造是科学最重要的本质，创新意识和创造精神要从小培养和塑造.”可见，早在 50 年代，华罗庚就在中学生中搞激励学数学的热忱的数学竞赛，是站得高看得远的举动，其意义是深远的.

为了指导全国中学生数学竞赛，弘扬中华民族的数学文化传统，华罗庚为中学生写了许多数学普及读物，做了许多数学普及的学术报告，这些报告也形成了读物，有的是小册子，有的是报纸上的文章. 比如，

- 数学是我国人民所擅长的学科.
- 三分角问题.
- 谈谈同学们学科学的几个问题.
- 和同学们谈谈学习数学.
- 我从事科学研究工作的体会.
- 写给向科学堡垒进攻的青年们.

- 聪明在于学习，天才由于积累.
- 从杨辉三角谈起.
- 大哉数学之为用.
- 数学的用场（五则）.
- 学·思·锲而不舍.
- 关于在等高线图上计算矿藏储量与坡地面积的问题（与王元合作）.
- 从祖冲之的圆周率谈起.
- 取法乎上，仅得乎中.
- 和青年谈学习.
- 学与识.
- 从孙子的“神奇妙算”谈起.
- 数学归纳法.
- 谈谈与蜂房结构有关的数学问题.
- 有限与无穷，离散与连续（与王元合作）.

……

华罗庚在中学生中举办数学竞赛，向中学生做数学普及工作，是从苏联学来的. 1946年他访苏时，看到许多苏联著名数学家为举办中学生数学竞赛做普及数学报告. 由此他得到启迪，他感到一个民族只有这样才能发现和培养高水平的新人才. 苏联数学人才济济和高水平的数学研究是与它的中学数学教育分不开的. 华罗庚向苏联学习是学其精华，也充分体现了中华民族善于学习的精神.

华罗庚面向中学生做的数学普及工作本身，也是充满了创造性，充分说明了他始终把创新放在首位. 他当年写的具有创造性的独特的普及数学读物，至今仍是科普精品，和他的论文专著精品一样，都是不朽之作. 他做这件事，心中有很高的标准，认定这是千秋万代之事，绝不是仅为眼下的竞赛，热闹一阵. 因此，他的这类数学普及工作，没有一丝一毫教学生如何猜题、如何考高分、如何训练去获奖等等的痕迹，而是教中学生和中学教师如

何培养分析问题和解决问题的能力，他教给人们的是思想方法与技巧，以及勤学苦练的学风. 他的每次讲演总是深入浅出、由易到难、由低到高、引人入胜.

华罗庚面向中学生的数学普及的选材非常考究，除考虑到数学学科的特性、中学生的水平、选材一题一议具体展开外，他把数学研究做为中华民族文化的重要组成部分，不断阐述中国古代数学家的成就及他们的独创性. 因此，这些又是爱国主义和科学探索创新精神的教材.

华罗庚从事的面向大众的、为国家建设服务的数学普及工作，始于 1958 年. 1958 年是华罗庚在数学研究道路上，从纯粹数学转向应用数学的转折点. 在应用数学的人才培养方面，那年他在刚刚成立的中国科技大学里，设立应用数学与电子计算机系(这在全国高校是首次)；在数学为国家经济建设服务方面，那年他开始做面向大众的数学普及工作. 同时探索应用数学的发展道路. 在他倡议下，全国首次推广应用运筹学方法，主要是推广应用线性规划中的方法，曾一度在北京和山东形成群众运动，其中中国独创的运输问题的“图上作业法”在一些部门的普及推广，收到了一定的成效. 随后线性规划的单纯形法、打麦场设计、机器排序等方法也在一些部门普及推广过. 面向大众的数学普及工作，不论在选材上还是普及工作本身，比起面向中学生的普及工作来要难得多. 这两类数学普及工作的检验、评价标准也不一样. 事实说明，不是所有的数学方法都能解决实际问题，也不是所有能解决实际问题的数学方法都能用来做为面向大众的普及材料. 所以前面提到的似乎在某些部门很有用的运筹学和应用数学方法，在华罗庚带动下，虽然参加普及数学方法的数学工作者努力工作，但成效并不十分显著. 鉴于此，华罗庚究其原因，又经过长期审视筛选，最终以统筹法、优选法为普及数学方法的重要技术，从试点取得经验开始，在中国展开了长达 20 多年的数学普及工作为主的生涯，同时也为中国应用数学发展探索道路做出了重大贡献.

§7.2 统筹方法

华罗庚开展面向大众的数学普及工作，即是对中国大众的数学文化的启蒙工作，又是数学直接为国家建设服务的工作，同时又是对在中国应用数学应如何发展的一种探索.

前面已提过，经过长期审视，他选择的第一个数学普及技术是统筹方法．那么，他是怎么选择的？统筹方法又是怎么产生的？

从世界范围看，在二次大战后，运筹学和应用数学有了突飞猛进的发展，已形成了许多独立的分支学科．每个分支又有许多从实际中提取的模型及其算法．就国内而言，已有一批数学工作者转到运筹学的若干分支工作，中国科技大学在全国高校中首次开设运筹学专业，这个专业放在数学系，它的专业课设置中有：排队论、线性规划、非线性规划、动态规划，在这三门规划论课程中都包含有整数规划部分．还有博奕论、质量控制、存储论、更新论、经济数学等课程．这些分支学科都有很强的实际背景，它们的模型与算法都有应用前景．在这些分支中能否选出一种便于向大众普及的方法呢？华罗庚和中国的数学工作者试过．他们曾在中国的一些部门在一定程度上试过这些分支中的一些看上去易普及的方法，但不能说很成功！华罗庚倡导并参与过这种普及推广活动，花费了不少精力，力图走（找）出一条面向大众、为经济建设服务的普及数学方法的路子来．但这条路难走！他在分析过去不成功的经验教训时，认为他和他的同事们在已进行过的数学普及工作中，目的是明确的（为谁的问题），关键在于用什么技术（什么数学方法）和怎样去做普及工作上．首先是选择什么数学方法．因此，他的思维奔驰在运筹学和应用数学各分支组成的平川与峻岭之中，以图找出一种便于普及的好技术来，以便先试点，后普及．

明寻暗觅，终能出现机遇，机会果然来了，说来出于偶然，

1964年一次偶然的机会，他看到了CPM与PERT方法的应用背景与发展过程（日本科学家系川英夫送给他一本有关系统理论与组织、控制方面的书中介绍了这些方法）．他根据自己的数学直觉和以往的经验，敏锐地判断：这就是自己所要寻觅的那种技术．

他以“CPM”方法为核心，经过他提炼加工，形成了适合中国国情的数学普及技术，称之为“统筹方法”．

以华罗庚的品格，他首选的数学普及技术最好是本国的，他也试过本国独创的“图上作业法”，从他面向中学生的普及工作选材中，也明明白白地表明了这一点．那么，为什么他选中了“CPM”方法，又怎样加工之，使其成为中国式的统筹方法呢？

选择面向大众的普及数学方法，首先要明确三个原则：

① 为谁？或目的是什么？

② 什么技术？

③ 如何推广？

为谁？目的是什么？这自然是最根本的问题．它直接影响采用什么技术和如何普及推广．而过去普及工作不很成功之关键在于不太知道该采用什么技术和如何去普及推广．所以他在为今后普及工作选择技术时，首先要看被选的技术对大众是否有用，大众是否能接受（学得会，用得上）；在日常生活和工农业生产过程中，是否客观上就存在大量的这种技术可用武之地的模型（背景）．称之为统筹方法的技术满足以上所述的群众性和实践性的要求，这是华罗庚选择它作为普及技术的第一个原因．

其次，在一个国家、在一个民族中间进行数学普及，其本身是一种民族文化现象，因此普及技术的选择不得不考虑这个民族的此种文化素质，以及这个民族所擅长的思维方式和特点．就我们中华民族而言，中华民族对数学科学的发展有着不可磨灭的贡献，中国传统数学源远流长，中华民族历史上形成的一种特殊的数学传统，造就了这个民族有一种特殊的数学素质．中国人历来更着重于形象思维．因此，选择普及技术要看它便不便于大众的

形象思维．统筹方法的数学表示可以集中在一个“统筹图”上，此种图即是模型，而且解此模型的算法含在此图中，它确实便于中国大众形象思维，认识它、掌握它、运用它．这是华罗庚选择统筹方法为普及技术的第二个原因．

有的数学方法也能解决工农业生产中的一些问题，也有成效，但不便普及，主要在于不易形象思维．有人说这不要紧，我教你方法，你按法去做，得到数据后，我再教你怎么算，最终会有一个结果．华罗庚不太赞同在普及数学方法的最初阶段选择这种技术．他认为这种技术不是不能用而是不到时候．就当时而言，这种技术离中国大众的数学素质太远，所以普及之初不宜做．如果强行做，也许问题也解决了，但大众离数学更远了、更神秘了．

再者，普及数学方法还有一个重要目的，就是消除人们对数学的神秘感，即真正起启蒙作用．中国应用数学的发展，很大程度上取决于第一阶段——普及阶段的启蒙效果，即能不能消除大众对数学的神秘感．用一些简单的数学技术去解决一大批实际问题，让数学的一些简单的思想和方法深入人心，得到广大大众所喜爱，为更高层次的应用数学的发展铺平道路．

另外，选择普及技术时，还要看这种技术能否用深入浅出的语言表述，能不能举出日常生活中非常简单的、能抓住本质的、生动的实例．

华罗庚根据 CPM 方法加工制作的“统筹方法”就是在以上诸方面深刻思考之后加工的一种技术．满足以上诸方面的要求的数学技术，不是遍地都有，垂手可得的．

如何普及推广？

普及技术选好后，如何普及推广，还有一系列事情要做．首先要对已选的技术进行加工，使之直观形象、深入浅出、通俗易懂、为大众喜闻乐见，然后找适合运用这种技术的单位进行试点，若试点成功，再组织普及推广．每个环节都有难点，解决这些难点，都要有独创性．这是一个过程，在这个过程的每一步

中，数学工作者所下的功夫，与纯粹数学的专题研究下的功夫，完全不同．这是一个很艰难的过程．

先谈如何加工．如果直接用现成的CPM技术进行普及，行吗？显然不行．用华罗庚的话说，那相当于让中国大众吃“生姜”．即使是土生土长的中国自己的数学方法，如“图上作业法”，华罗庚在推广它时，还要对它进行加工，让它更加深入浅出，直观形象，通俗易懂，用中国大众喜爱的歌谣方式去描述图上作业的做法．

华罗庚对CPM方法加工过程是：

① 首先，举一个日常生活中的实例，说明这种技术的核心思想及方法要点，同时也给出了这种技术所能解决的问题的提法．

② 对于适合用统筹方法的一般问题，给予统筹方法的数学描述，这种数学描述就是一个特殊数学模型：它用一个图来表示——这种图称为统筹图．这种特殊模型图，不但对问题的数学描述形象直观，逻辑关系清楚，而且求优方法隐含在图中，可以通过图来求优．这样的图交给大众，便于大众形象思维．

③ 用当代中国大众流行的平常说话语言与方式叙述以上实例与统筹图．整个技术的介绍，深入浅出、通俗易懂，形成一个平话式的小册子．

在第②，③的平话叙述中，注意数学语言和逻辑结构的运用，使人们很自然地接受统筹图是数与形完美结合的数学模型．实际问题实质性的逻辑结构与数量关系，已尽在此图中．

④ 给这个加工后的技术起一个合适的中国名字．

华罗庚根据CPM方法的实质和毛泽东在《正确处理人民内部矛盾》中提到的用“统筹兼顾、适当安排”来管理国家事务的启发，他给加工后CPM定名为“统筹方法”，介绍统筹方法的小册子，叫做“统筹方法平话”．

⑤ 把统筹方法中比较难的部分及有关理论问题都放在小册子的后半部，有待研究，以利提高．

华罗庚说，这样的小册子，有一些数学修养的人能看懂一大半，人民大众中一般的人能看懂前面的一小半，就可以了．他还说，即使没什么文化的人听了他的普及报告后，或者有文化的人看了小册子后，过了一阵子，好像什么都忘了，但脑子里还留下那个实例，那就留下了思想，留下了方法；就会联想应用，就会举一反三．许多人的实践经验，真是那样．回过头去看，似乎一切都忘了，但那个例子还留在脑海里，真是这样，确实妙在其中．

听过华罗庚的统筹方法普及报告的人，数量在百万以上，其中有各种类型的人群．广大民众听了之后，一般能结合自己的行业工作，运用统筹方法去较好地安排自己的工作任务．即使是行政或政工干部，文化水平和数学素养不高，他们听后也能在日常生活中加以运用．比如，当时中国科大有个党委副书记，老干部，听了华罗庚讲的统筹方法后，马上联想到她每天早晨从起床到上班这段时间的安排，觉得可以用统筹方法把它安排得更合理．

原先安排是这样的：

起床→先梳头→后洗脸、刷牙→然后煮牛奶→等待凉牛奶→喝牛奶、吃点心→上班．

后来安排是这样的：

起床→先煮牛奶→凉牛奶
在煮牛奶、凉牛奶的等待过程中 | →喝牛奶、吃点心→上班
同时→梳头→洗脸、刷牙

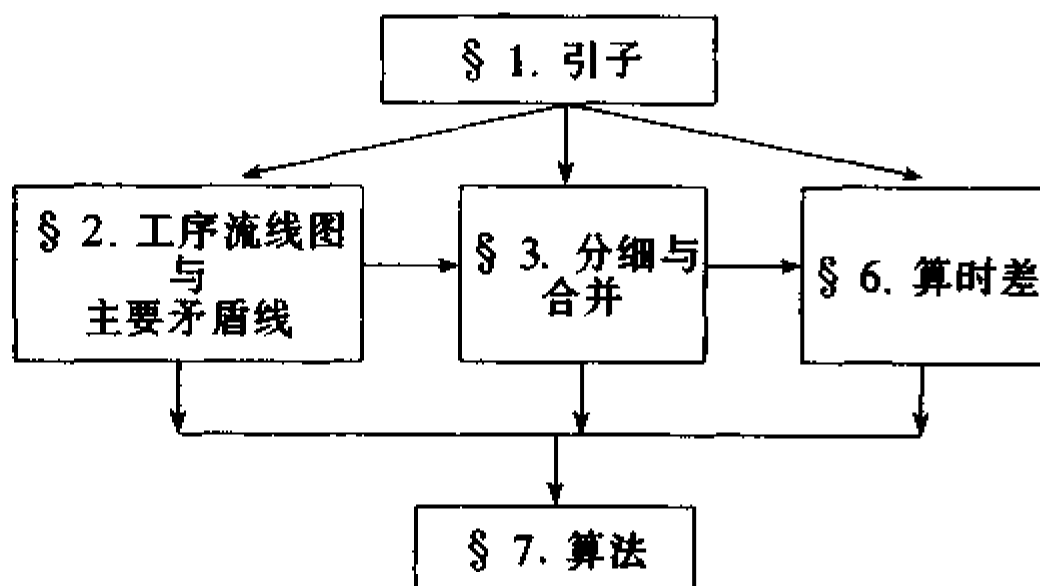
原来的安排，每天总是司机等她，接她上班．后来的安排，同样时间起床，司机也是按原来的时间到，每天总是她等着司机来接她上班．

高级知识分子也在日常生活中运用统筹方法．比如，有位中科院院士，非常勤快，在家时他经常亲自下厨做饭，他每做一顿饭菜总是按统筹方法来安排，先做什么，后做什么，中间插进去做什么，即节省时间，又井井有条．

可见统筹方法，经华罗庚加工制作，确实容易被人接受和运用．不管文化水平高的还是低的，都乐于采纳，用于自己的生活与工作．

现在我们来看一下统筹方法平话的前面部分，看看华罗庚是怎样加工制作的，又怎样深入浅出地向大众普及统筹方法的．

在这里我们不打算仔细介绍，仅介绍以下几个部分：



其中最重要的是§1，§2，§6．

注：还剩下的肯定型部分的内容有：

§4．零的运用

§5．编号

§8．原材料、人力、设备与投资

§9．横道图

非肯定型部分，介绍PERT技术，共分12节，包括化非肯定型为肯定型及其概率处理．

§1　引子

想泡壶茶喝．当时的情况是：开水没有，开水壶要洗，茶壶茶杯要洗；火已升了，茶叶也有了，怎么办？

办法甲：洗好开水壶，灌上凉水，放在火上，在等待水开的时候，洗茶壶、洗茶杯、拿茶叶，等水开了，泡茶喝．

办法乙：先做好了一些准备工作，洗开水壶，洗茶杯，拿茶叶，一切就绪，灌水烧水，坐待水开了泡茶喝.

办法丙：洗净开水壶，灌上凉水，放在火上，坐待水开，开了之后急急忙忙找茶叶，洗茶壶，泡茶喝.

哪一种办法省时间，谁都能一眼看出第一种办法好，因为后二种办法都“窝了工”.

这是小事，但是引子，引出一项生产管理方面有用的方法来.

开水壶不洗，不能烧开水，因而洗开水壶是烧开水的先决问题. 没有开水、没茶叶、不洗茶杯，我们不能泡茶. 因而这些又是泡茶的先决问题.

它们的相互关系，可以用图1的箭头图来表示. 箭杆上的数字表示这一行动所需要的时间，例如$\xrightarrow{15}$表示从把水放在炉上到水开的时间是15分钟.

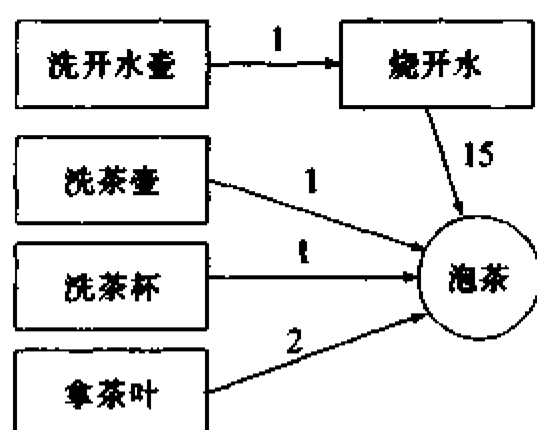


图1

从这个图上可以一眼看出，办法甲总共要16分钟（而办法乙、丙需要20分钟）. 如果要缩短工时，提高工作效率，主要抓的是烧开水这一环节，而不是拿茶叶这一环节. 同时，洗壶杯、拿茶叶总共不过4分钟，大可利用“等水开”的时间来做.

是的，这好像是废话，卑之无甚高论. 有如，走路要用两条腿走，吃饭要一口一口吃，这些道理谁都懂得，但稍有变化，临

事而迷的情况，确也有之. 在近代工业的错综复杂的工艺过程中，往往就不能像泡茶喝这么简单了. 任务多了，几百几千，甚至有好几万个任务；关系多了，错综复杂，千头万绪，往往出现万事具备，只欠东风的情况，由于一两个零件没完成，耽误了一架复杂机器的出厂时间. 也往往出现：抓的不是关键，连夜三班，急急忙忙完成这一环节之后，还得等待旁的部件才能装配.

洗茶壶、洗茶杯，拿茶叶没有什么先后关系，而且同是一个人的活，因而可以合并成为

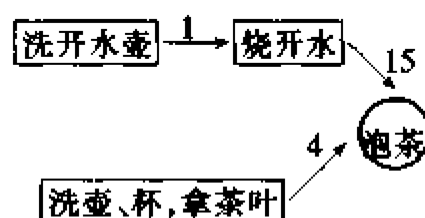


图 2

用数字表示任务，上面的图形可以写成为

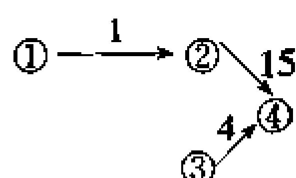


图 3

1—洗开水壶；2—烧开水；3—洗壶、杯，拿茶叶；4—泡茶

看来这是“小题大作”，但在工作环节太多的时候，这样做就非常有必要了.

这样一个数字代表一个任务的方法称为单代号法，每一个数目字代表一个任务，写在箭尾上，箭杆上的数字代表完成这个任务所需要的时间.

另一个方法称为双代号法. 我们把任务写在箭杆上，如图 4. 箭头与箭尾衔接的地方称为节点（或接点），把节点编上号码. 图 4 成为图 5：

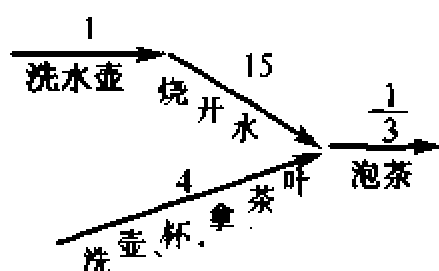
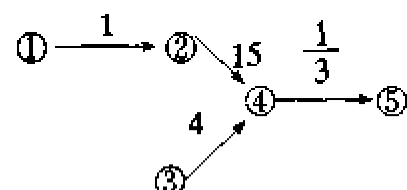


图 4



(1—2)——洗开水壶；(2—4)——烧开水；
(3—4)——洗壶、杯，拿茶叶；
(4—5)——泡茶

图 5

单代号法与双代号法哪个好，实际上是各有优点．我们用双代号法开始讲，在讲的过程中穿插着讲单代号法．

注记：必须指出，统筹方法研究的实际问题，如泡茶问题，可以用图 3 或图 5 表述，这种表述就是数学模型，这种图就称为统筹图．这种统筹图既有空间形式，又有数量关系，表述得简洁形象，一目了然．

还必须指出，这种实际问题，还有别的数学模型，再以泡茶问题为例，它的数学模型可以表述成一个线性规划问题．为叙述简单起见，我们借助一下图 5（也可以不用这个图）．

令 t_i 表示与节点 i 连接的任务的开工时间．

t_{ij}表示任务（$i-j$）所需的完工时间．

那么，泡茶问题的数学模型为以下的线性规划问题：

$$\min Z = t_5 - t_1$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} t_2 - t_1 \geqq 1(= t_{12}) \\ t_4 - t_2 \geqq 15(= t_{24}) \\ t_4 - t_3 \geqq 4(= t_{34}) \\ t_5 - t_4 \geqq \dfrac{1}{3}(= t_{45}) \\ t_i \geqq 0, i = 1,2,\cdots,5. \end{cases}$$

对于数学工作者来说，这个线性规划模型也很简单明了，但是对大众来说，这种表述的模型，由于缺乏直观形象，就难以接受了．

§2 工序流线图与主要矛盾线

一项工程（或一个规划），总是包含多道工序的．如果已经有了现成的计划，我们可以依照这个计划和各工序间的衔接关系，用箭头来表示其先后次序，画出一个各项任务相互关系的箭头图，注上时间，算出并标明主要矛盾线．这个箭头图，我们称它为工序流线图．把它交给群众，使群众了解自己在整个工作中所处的地位，有利于互赶互帮，共同促进．把它交给领导，便于领导掌握重点，统筹安排，合理调整，提高工效．

好啦，现在有这样一项工作，一共有17道工序，我们把它画出箭头图（见图6），图上每个工序我们把它叫做一项任务．

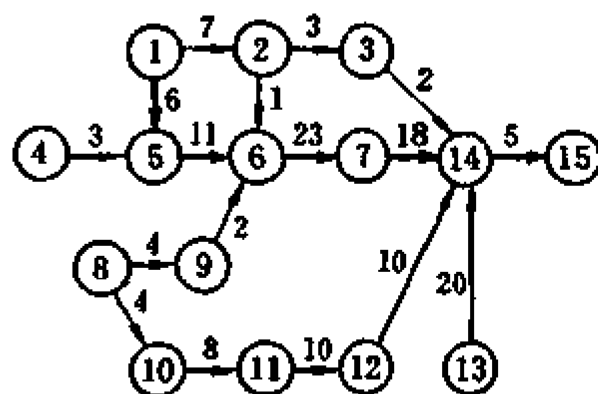


图6

④→⑤→⑥表示任务（4—5）完成后，才能进行任务（5—6），又如任务（6—7）必须在（2—6），（5—6），（9—6）三项任务都完成的基础上才能开始进行．

④$\xrightarrow{3}$⑤表示自任务（4—5）的开工之日起到完成之日（亦即下一任务可以开工之日）止，共需三周．任务（7—14）开工后18周才能把半成品送到任务（14—15），而最后任务（14—15）必须待任务（3—14），（7—14），（12—14），（13—14）都完成之后，再用5周的时间才能交出成品．

图画好之后，进行以下的分析：算出每条线路的总周数．例

如线路

$$④ \xrightarrow{3} ⑤ \xrightarrow{11} ⑥ \xrightarrow{23} ⑦ \xrightarrow{18} ⑭ \xrightarrow{5} ⑮$$

共需 3+11+23+18+5=60 周．把所有的线路都加以计算，其中需要周数最多的线称为主要矛盾线．这一工序流线图的主要矛盾线是：

$$① \xrightarrow{6} ⑤ \xrightarrow{11} ⑥ \xrightarrow{23} ⑦ \xrightarrow{18} ⑭ \xrightarrow{5} ⑮$$

共 6+11+23+18+5=63 周．

用红色（或粗线）把主要矛盾线标出来（同时如有必要也可以用其它颜色标出一些次主要矛盾线）．在工作进程中，主要矛盾线上延缓一周，最后完成的日期也必然延缓一周，提前完成也会使产品提前出厂．把这图交给群众，使群众一目了然，知道此时此地本工种所处的地位，有利于职工发挥主观能动性．经过若干时日，如果在主要矛盾线上进行得比预期迅速，或非主要矛盾环节有所延误，这时必须重新检查和修改流线图，并特别注意主要矛盾线是否已经转移．

这种图形的作用远不止此，还可以举出以下几方面好处．例如：

(1) 从图 6 可以看出，任务（4—5）可以比任务（1—5）缓开工三周而不影响进度，任务（13—14）更不必说可以缓开工 38 周，但不能再缓了（每一任务都可以算出最迟开工期限、最早开工期限及时差，为了简单起见这儿暂且不谈）．

(2) 从图上看出可以从非主要矛盾线上抽调人员支援主要矛盾线，这样可以提高效率，即使抽去的人员工种不同，一个人只顶半个人用，有时也并不吃亏，但抽调后必须重新画图．

当然流线图还有不少其他的好处，这儿就不一一列举了．

我想在此也乘便提一下，主要矛盾线可能不止一条．一般讲来，安排得好的计划，往往出现有关零件同时完成，组成部件；有关部件同时完成，进行总体装配的情况．在这种情况下主要矛盾方面就不是用一条线表达了．愈是好的计划，红线愈多，多条

红线还可以作为组织劳动竞赛的依据.

当然，终点也可能不止一个. 例如，化学分析可以陆续地分析出若干种元素，获得每一种元素都可以作为终点. 在这种情况下，我们可以将起始点至每一个终点所需要的时间进行比较，把需要时间最长的线路，定为主要矛盾线. 但另一方面，也可以根据产品的主次，定出主要矛盾线来. 换言之，即将起始点到主要产品的终点需要时间最长的线路，定为主要矛盾线.

§3 分细与合并

从图 6 看出任务（6—7）的完成需要 23 周，时间最长，这就启发我们考虑为了加快进度，可否把任务（6—7）重新组织一下，其方法之一是要细致地画一⑥→⑦的工序流线图，标出主要矛盾线，研究缩短时间的可能性. 例如，一个单向挖掘的隧道工程，我们采用两头开挖的方法，这样，一个任务变为两个任务，加快了进度（请读者设想一下，一个任务变为两个，箭头图怎样画）.

为了容易看得清楚或计算方便起见，有时我们在图上也把一些任务合并考虑，如将图 1 合并为图 2.

又如图 6 可以将②③合并、⑥⑦合并、⑩⑪⑫合并得图 7.

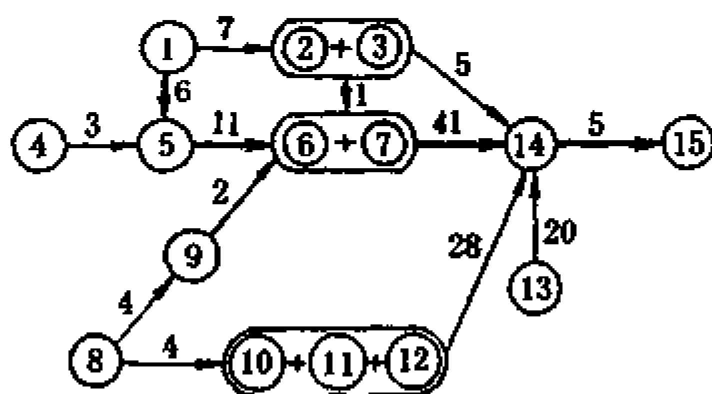


图 7

并得多么粗，分得多么细，随客观需要与具体情况而定. 具

体负责的技术员、调度员为了便于掌握，应当把图画得更详尽些，更细致些，供领导和群众一般参考的可以画得粗些. 密如蛛网，望而却步的工序流线图，不但不易获得群众的支持，而且难使领导看出重点，做到心中有数. 但不细致，又不能发现关键所在. 因此，在主要矛盾线上，每一环节都值得分细研究. 这样可以找出缩短工时的可能性.

§6 算时差

在讲主要矛盾线的时候已经讲过，统筹方法可以找出主要矛盾线来，同时也可以看到非主要矛盾线上的项目是有潜力可挖的. 潜力到底有多大？这将是本节所要说明的问题.

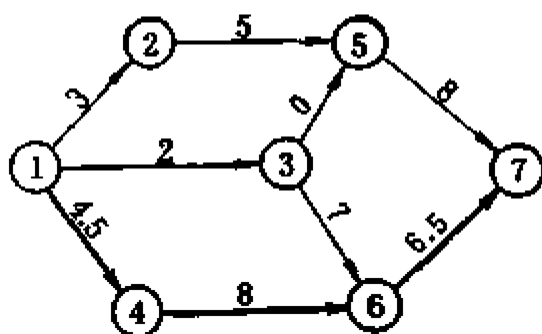
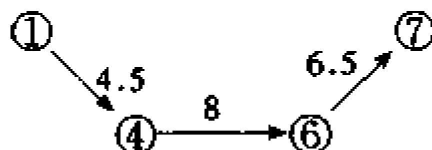


图 8

从这个较简单的箭头图（图 8）来看，它的主要矛盾线是：



共需时间 $4.5+8+6.5=19$（周）.

我们先算每一任务最早可能开工日期，用□表示之. 它的算法如下：从起始点到某一任务，可能有许多条路线，每条路线有一个时间和，这些时间和中，必有一个最大值，这个最大值就是该任务的最早可能开工日期. 例如由①到⑥有两条路线 $2+7=9$，$4.5+8=12.5$. 因此⑥→⑦线下写 $\boxed{12.5}$. 把话讲得更确切

些：如果--切按计划进行，在 12.5 周内，任务⑥→⑦的开工条件是不具备的，而最早可能开工时间是 12.5 周完结的时候.

再算出各任务的最迟必须开工日期，用△表之. 也就是说如果这个任务在△形内所标时间之后开工，就要影响整个生产进度了. 它的算法如下：从终止点逆箭头到某一任务，亦可能有许多条路线，这些路线的时间和中，也有一个最大值，由主要矛盾线上的时间总和减去这个最大值，再减去这一任务所需的时间，就是这一任务的最迟开工日期. 例如，从终止点到③共有两条路线，各需 8+0=8 周及 7+6.5=13.5 周，其中 13.5 周较大，而主要矛盾线时间总和是 19 周，因此在任务①→③线下写上△(3.5=19-13.5-2).

把上面计算的结果都写在图上，就得图 9.

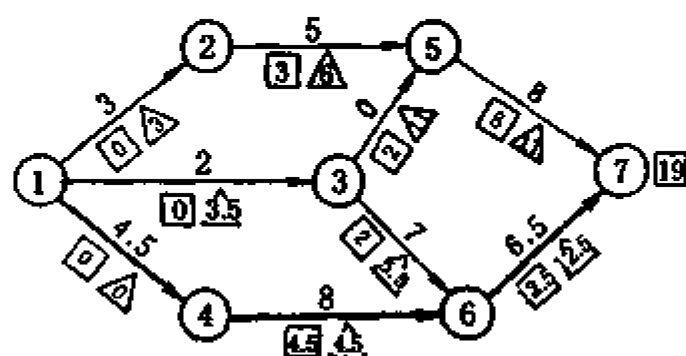


图 9

再赘一句，对任务（3-6）来说：由于它的上一任务还没完成，它不可能在两周内开工. 但如果在 5.5 周后才开工，就必然耽误整个进度. 在主要矛盾线上□△内的数目一定相等. □△内数值差额愈大的任务，愈有可以支援其他任务的潜力.

反向图：把图 8 的所有箭头都倒转过来，得下图 10
试算出反向图上各最早可能开工时间及最迟必须开工时间，比较一下，看看它们之间有什么关系. 不难看出顺向图的最早可能开工时间，加上反向图的最迟必须开工时间，再加上相应的工序时间等于 19；同时顺向图的最迟必须开工时间，加上反向图的最

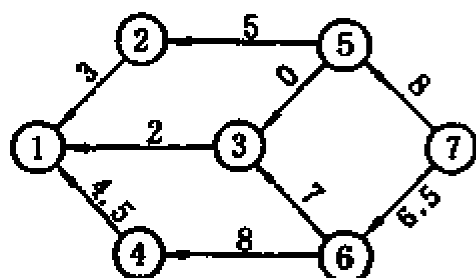


图 10

早可能开工时间，再加上相应的工序时间也等于 19.

这是指领导没有给我们特别指示的情况下，假设根据有关历史资料或对每项任务所需时间的经验估计，所作出的图．如果领导指示工程必须在 17 周内完成，我们对△内的数字就不能这样填，就必须以 17 周为基数来进行反算．于是①→④、④→⑥、⑥→⑦处的时差都变为 −2．因此，我们必须采取措施，来满足这一要求．与此相反，如果领导要求是 20 周完成，则△内的数字就依 20 周为基数，进行反算，于是时差都多了 1 周．遇见这样情况，我们就该机动地从节约角度来考虑问题，酌量地减少劳动力并使其均衡，或适当地减少设备．

注意 图 8 是作为练习提出的，试想一下，虚任务③$\xrightarrow{0}$⑤的意义，也就是图 8 的逻辑关系是否等价于图 11：

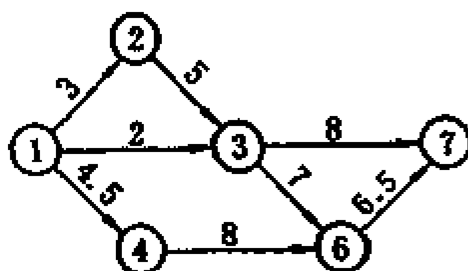


图 11

图 8 是双代号的，利用

(1—2)(1—3)(1—4)(2—3)(3—6)(4—6)(3—7)(6—7)(7—)

A B C D F G H I J

可以把它变成为以下的单代号表示图：

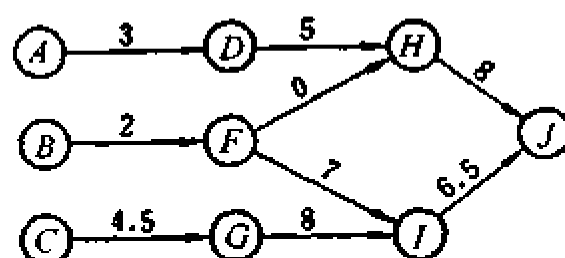


图 12

（图中Ⓐ，Ⓑ，Ⓒ三项任务同时开始进行）

§7 算法

对简单的情况说来，线路是一目了然的. 但任务多了，线路纷杂，哪些已经算过了，哪些还没有算过，这就出现了既麻烦，而又容易产生错误的情况. 那么，怎样来避免错误，避免漏算呢？为此，一套计算表格就产生出来了（见表 1）. 第一栏是工序代号，依第一字（箭尾号码）的顺序由小到大排列，如果第一字相同则依第二字（箭头号码）的顺序排列. 其余几栏依次是，这一工序需要的时间 t_E、最早可能开工时间 T_E（也就是预计在这期间内不可能开工）、最迟必须开工时间 T_L（也就是按预计，在这期间内不开工将影响整个工程进度）及时差.

以§6 图 8 为例，我们可以列出表 1 的计算表格.

表 1－1 的第三栏 T_E 可以从表上由上而下地计算. 工序(1－2)、(1－3)、(1－4)的 $T_E=0$，工序(2－5)的 T_E 等于(1－2)的 T_E 加 t_E($=0+3=3$). 工序(3－5)及(3－6)的 T_E 等于(1－3)的 T_E 加 t_E($=0+2=2$). 工序(4－6)的 T_E 等于(1－4)的 T_E 加 t_E($=0+4.5=4.5$). 工序(5－7)的 T_E 等于(2－5)及(3－5)中的 T_E 加 t_E 的较大者(即 $3+5=8$, $0+2=2$ 中的较大者 8). (6－7)的 T_E 等于(3－6), (4－6)中的 T_E 加 t_E 的较大者($2+7=9$, $4.5+8=12.5$，较大者为 12.5). 而 7 的 T_E 由(5－7), (6－7)得来($=19$).

总的一句话，本工序的 T_E 等于紧前工序的 T_E 加 t_E，或紧前各工序的 T_E 加 t_E 中的较大者.

表1第四栏 T_L 的算法，是从下而上. 工序(6－7)的 T_L(＝19)等于7的 T_L 减去(6－7)的 t_E(19－6.5＝12.5). 同样(5－7)的 T_L 等于7的 T_L 减去(5－7)的 t_E(19－8＝11). (4－6)的 T_L 等于(6－7)的 T_L 减去(4－6)的 t_E(12.5－8＝4.5). (3－6)的 T_L 等于(5－7) T_L 减(3－5)的 t_E(11－0＝11). 总的一句话，本工序的 T_L 等于紧后工序的 T_L 减去本工序 t_E，或紧后各工序 T_L 中的最小者减去本工序的 t_E.

表1

工序编号		本工序时间	开工时间		时差
箭尾号	箭头号	t_E	最早 T_E	最迟 T_L	$T_L - T_E$
1	2	3			
1	3	2			
1	4	4.5			
2	5	5			
3	5	0			
3	6	7			
4	6	8			
5	7	8			
6	7	6.5			
7					

将以上计算结果填入表内，再在第五栏填入相应的 T_L 减 T_E 的值，即得表2.

表 2

工 序 编 号		本工序时间	开 工 时 间		时 差
箭尾号	箭头号	t_E	最早 T_E	最迟 T_L	T_L-T_E
1	2	3.0	0	3.0	3.0
1	3	2.0	0	3.5	3.5
1	4	4.5	0	0	0
2	5	5.0	3.0	6.0	3.0
3	5	0	2.0	11.0	9.0
3	6	7.0	2.0	5.5	3.5
4	6	8.0	4.5	4.5	0
5	7	8.0	8.0	11.0	3.0
6	7	6.5	12.5	12.5	0
7			19.0	19.0	0

在图上将时差为“0”的各工序，用红线（或粗线）连起来，即为主要矛盾线．对熟练的人来说，不必用表格计算，只要逐步比较，就可以很快地找出主要矛盾线来．

例如：在图 8 中，首先将①→④→⑥与①→③→⑥比较，①→④→⑥的时间长，就可把③→⑥甩掉，再比①→③→⑤与①→②→⑤，可甩掉①→③→⑤，这样，只剩下两条线①→④→⑥→⑦，①→②→⑤→⑦，两者比较，立刻可以找出①→④→⑥→⑦为主要矛盾线．

例题：试用对比法找出下图的主要矛盾线．

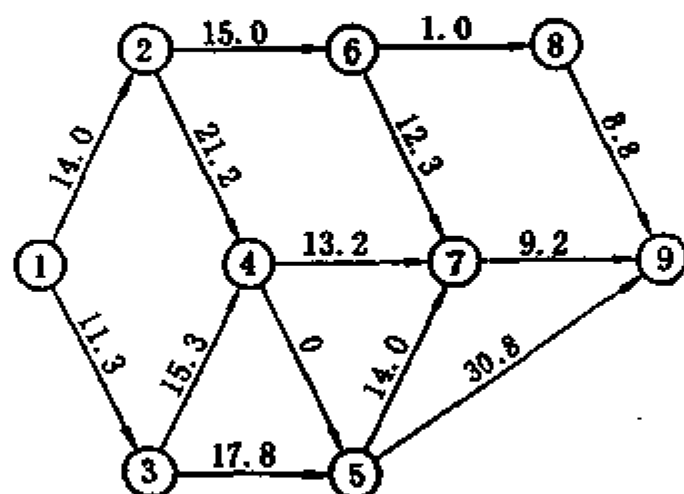


图 13

先比⑥→⑧→⑨，⑥→⑦→⑨，甩掉前者，再甩②→⑥→⑦，再甩④→⑦、⑤→⑦→⑨，再甩③→④，最后甩①→③→⑤，因此，得出主要矛盾线①→②→④→⑤→⑨.

§7.3 优选法

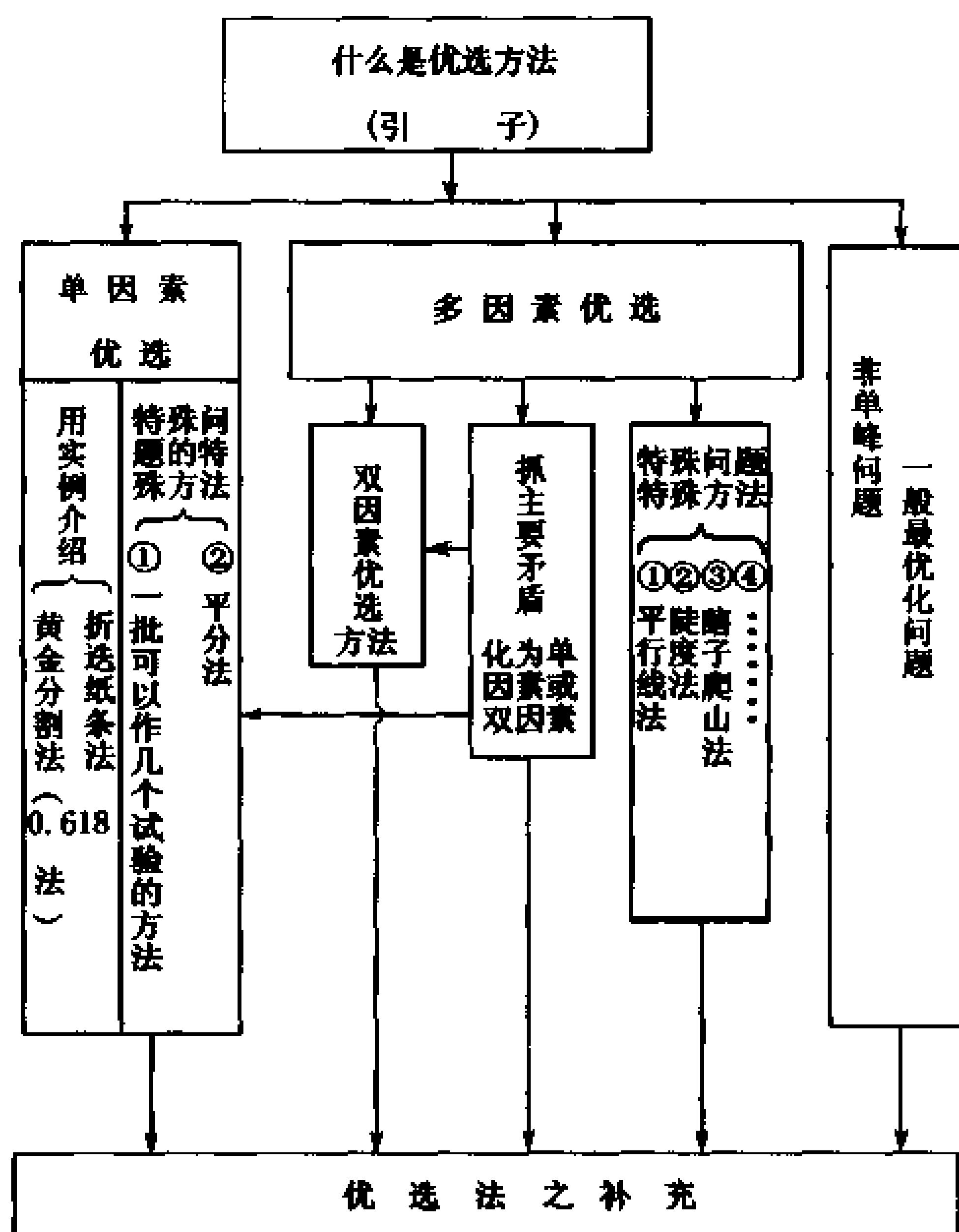
华罗庚在探索面向大众的数学普及道路时，经过长期的寻觅，先找到的普及数学技术是统筹方法，这是一种生产组织与管理方面的优化技术. 在西南进行统筹方法第二次试点时，才引发了华罗庚普及数学技术——优选法的想法，它是另一种优化技术，主要用于如何优选产品参数和工艺过程，以提高产品质量. 它们在中国普及数学舞台上先后出现，有其偶然性，更有其必然性.

优选法试点很快取得成功，其适用面广、操作简单、效果显著、大众欢迎，这使华罗庚认定，从 1970 年开始普及数学技术以优选法为主. 此后长达十多年的普及数学群众运动，在全国二十多个省市或自治区的各行各业中，优选法的普及推广应用像大海的波涛一样、铺天盖地似地席卷各省的每个角落. 在医学上，外科医生用了优选法，能够很快地在病人肠子里找到出血点. 过去总是夸耀某人花了几十年功夫，做了几百次、甚至几千次试验，才获得了某一个成果，自从出现了优选法，以及随后均匀设计法的提出，人们发现根本没有必要做那么多次试验、花费那么多时间、精力和资金才能获得某项成果.

在这里，我们在介绍华罗庚普及优选法的思想和做法的时候，由于前面已经对普及统筹方法的思想和做法做过较详细的介绍，为了避免重复，我们仅简述一些要点.

华罗庚写的“优选法平话”及“优选法平话及补充”，并在此基础上出版了专著《优选学》，这些著作里面包含的内容非常丰富，几乎是所有的优化技术. 我们不可能一一介绍所有这些技术. 只着重介绍单因素优选法，尤其是黄金分割法，或称 0.618

法. 请读者注意，我们是在数学普及的标题下介绍华罗庚的思想，而不是在最优化的标题下介绍华罗庚的思想. 因此，着重介绍他最简单的普及数学方法、通过最简单的方法的普及工作介绍他的普及数学思想是合适的. 其他内容我们给出一个框图，以便读者粗览其轮廓.



单因素优选法是优选法中最简单，也是普及面最广的一种，也就是说华罗庚普及优选法时，大众普遍地学会了单个因素的优选方法，这种方法与数学中的黄金数有关，所以人们称它为黄金分割法、黄金数为

$$\omega = \frac{\sqrt{5}-1}{2} = 0.6180339887\cdots,$$

它适合二次方程

$$\omega^2 + \omega - 1 = 0.$$

由于做试验时，取 ω 的前三位小数就够了，因此，黄金分割法也称 0.618 法.

这种方法说，如果单变量 x 的函数$f(x)$在区间(a,b)上是单峰函数,即存在 $x^* \in (a,b)$,使 $f(x)$在$(a,x^*]$中递增(或递减),而在$[x^*,b)$中递减(或递增),x^*称为 $f(x)$在(a,b)上的极值点(极大或极小);但是,我们并不知道 $f(x)$的表达式或表达式极其复杂,只是对于任何 $x \in (a,b)$,$f(x)$的值可以通过实验求值或计算程序求值.那么,通过两个函数值比较来最有效地求得 $f(x)$极值点的方法就是黄金分割法.

华罗庚完全撇开黄金分割法的严格数学理论证明，他把精力完全集中在如何教大众使用这个方法上. 为了大众能形象地接受 0.618 法，他用折迭纸条的办法宣讲，这也是一种创造. 他用折迭纸条的办法介绍 0.618 法，不但在国内广大大众能形象地接受这个方法，听得懂、记得住、用得上，而且连在欧美几十个一流学术讲坛上，他的折纸条法也大大吸引了广大数学家，他在台上活龙活现地展示纸条，他们在台下聚精会神地听着，完全被这简单、活泼生动的教学法所折服.

下面我们直接引用华罗庚“优选法平话及其补充”的前面一小部分文章，看一看他是怎样介绍优选法的.

§1　什么是优选方法?

优选方法的问题处处有，常常见. 但问题简单，易于解决，故不为人们所注意. 自从工艺过程日益繁复，质量要求精益求精，优选的问题也就提到日程上来了. 简单的例子，如：一枝粉笔多长最好？每枝粉笔都要丢掉一段一定长的粉笔头，单就这一点来说，愈长愈好. 但太长了，使用起来既不方便，而且容易折

断，每断一次，必然多浪费一个粉笔头，反而不合适．因而就出现了“粉笔多长最合适”的问题，这就是一个优选问题．

蒸馒头放多少碱好？放多了不好吃，放少了也不好吃，放多少最好吃呢？这也是一个优选问题．也许有人说：这是一个不确切的问题．何谓好吃？你有你的口味，我有我的口味，好吃不好吃根本没有标准．对！但也不完全对！可否针对我们食堂定出一个标准来！假定我们食堂有一百人，放碱多少，这一百人有多少人说好吃，统计一下，不就有了指标吗？我们的问题就是找出合适的用碱量，使食堂里说好吃的人最多．

这只是引子，是比喻．实际上问题比此复杂，还有发酵问题等等没有考虑进去呢！同时，这样的问题老师傅早已从实践中摸清规律，解决了这一问题了，我们不过用来通俗说明什么是优选方法而已．

优选方法的适用范围是：

怎样选取合适的配方，合适的制作过程，使产品的质量最好？

在质量的标准要求下，使产量最高，成本最低，生产过程最快？

已有的仪器怎样调试，使其性能最好？

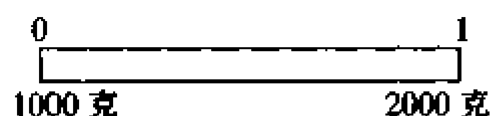
也许有人说我们可以做大量试验嘛！把所有的可能性做穷尽了，还能找不到最好的方案和过程？大量的试验要花去大量的时间、精力和器材，而且有时还不一定是可能的．举个简单的例子，一个一平方公里的池塘，我们要找其最深点．比方说每隔一公尺测量一次，我们必须测量 1000×1000，总共一百万个点，这个问题不算复杂，只有横竖两个因素．多几个：三个、四个、五个、六个更不得了！假定一个因素要求准两位，也就是分 100 个等级，两个因素就需要 100×100 即一万次，三个就需要 $100\times100\times100$ 即一百万次，四个就需要一亿次；就算你有能耐，一天能做 30 次，一年做一万次，要一万年才能做完这些实验．

优选方法的目的在于减少实验次数，找到最优方案．例如在一个因素时，只要做 14 次就可以代替 1600 次实验．上面所说的池塘问题，有 130 次就可以代替一百万次了（当然我们假定了池塘底都不是忽高忽低的）．

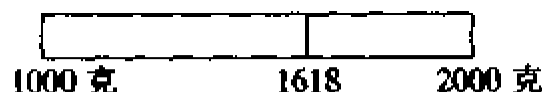
§2　单因素

我们知道，钢要用某种化学元素来加强其强度，太少不好，太多也不好．例如，碳太多了成为生铁，碳太少了成为熟铁，都不成钢材，每吨要加多少碳才能达到强度最高？假定已经估出（或从理论上算出）每吨在 1000 克到 2000 克之间．普通的方法是加 1001 克，1002 克，……，做下去，做了一千次以后，才能发现最好的选择，这种方法称为均分法．做一千次实验既浪费时间、精力，又浪费原材料．为了迅速找出最优方案，我们建议以下的“折迭纸条法”．

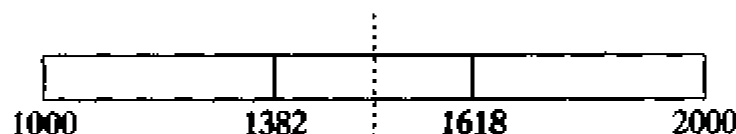
请牢记一个数 0.618．



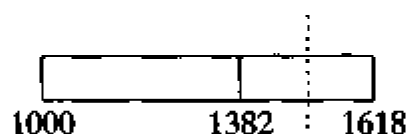
用一个有刻度的纸条表达 1000～2000 克，在这纸条长度的 0.618 的地方划一条线，在这条线所指示的刻度做一次实验，也就是按 1618 克做一次实验．



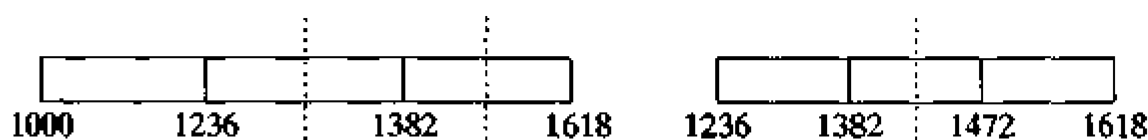
然后把纸条对中迭起，前一线落在另一层上的地方，再划一条线，这条线在 1382 克处，再按 1382 克做一次实验．



两次实验进行比较，如果 1382 克的好一些，我们在 1618 处把纸条的右边一段剪掉，得



（如果 1618 克比较好，则在 1382 克处剪掉左边一段）．再依中对折起来，又可找出一条线在 1236 克处：



依 1236 克做实验，再和 1382 克的结果比较．如果，仍然是 1382 克好，则在 1236 处剪掉左边：

再依中对折，找出一个试点是 1472，按 1472 克做实验，做出后再剪掉一段，等等．注意每次留下的纸条的长度是上次长度的 0.618 倍（留下的纸条长 = 0.618 × 上次长）．

就这样，实验、分析、再实验、再分析，矛盾的解决和又出现的过程中，一次比一次地更加接近所需要的加入量，直到所能达到的精度．

从炼钢发展的历史也可以充分地看出“优选法”的意义，最初出现的生铁，含碳量达 4%，后来熟铁出世了，几乎没有含碳量．在欧洲 18 世纪 70 年代前，熟铁还是很盛行的．各种钢的出现，就是按客观要求找到最合适的含碳量的过程．例如，可以冷压制成汽车外壳的钢是含碳量 0.15% 的低碳钢．做钢梁的大型工字钢所要求的是含碳量 0.25% 的软钢．通过热处理可以硬化制成车轴、机轴的是含碳 0.5% 的中碳钢．做弹簧、锤、锉、斧又需要含碳 1.4% 的高碳钢．各种合金钢就更需要选择配方了．

以上不过拿钢来做例子，像配方复杂的化学工业、生产条件复杂的电子工业等，那就更需要优选方法了．

§3 抓主要矛盾

事物是复杂的，是由各方面的因素决定的，因而必须考虑多因素的问题．但在介绍多因素的“优选法”之前，我们应该学习毛主席的论断：“任何过程如果有多数矛盾存在的话，其中必定

有一种是主要的，起着领导的、决定的作用，其他则处于次要和服从的地位.”

“优选法”固然比普通的穷举法（或排列组合法）更适合于处理多因素的问题，但必须指出，随着因素的增多实验次数也随之迅速地增加（尽管比普通方法的增加率慢得多)，因此，为了加快速度节约人力、物力，减少实验次数，抓主要矛盾便成为关键的关键；至少应当尽可能把那些影响不大的因素，暂且撇开，而集中精力于少数几个必不可少的、起决定作用的因素来进行研究.

举例来说：某金属合金元件经淬火后，产生了一层氧化皮，我们希望把氧化皮去掉，而不损害金属表面的光洁度. 有一种方法叫做酸洗法，就是用几种酸配成一种混合液，然后把金属元件浸在里面，目的在短时间内去掉氧化皮，不损失光洁度.

选择哪几种酸的问题，这儿不说了. 只说，已知要用硝酸和氢氟酸，怎样的配方最好？具体地说要配 500 毫升酸洗液，怎样配？

看看因素有多少：硝酸加多少？氢氟酸加多少？水加多少？什么温度？多长时间？要不要搅拌，搅拌的速度和时间？一摆下来有七个因素，每个因素就算它分为 10 个等级，用穷举法就要做 10^7 次试验，即一千万次，就算优选法有本领，只要万分之一的工作量，那也要做一千次，太多啦！

请看搞这项实验的同志是怎样按照毛主席抓主要矛盾的指示来分析问题的.

总共是 500 毫升，两种酸的用量定了，水的量也就定了，所以水不是独立因素.

其次，配好了就用，温度的变化不大，温度不考虑.

再其次，时间如果指的是配好后到进行酸洗的时间，我们也不考虑这时间，因为配好就洗；如果指酸洗所需要的时间，那不是因素而是指标，这次搞出的酸洗液只要三分钟，所以也不成问题.

最后，搅拌不搅拌就暂不考虑.

结果就只有两个因素：硝酸多少？氢氟酸多少？因此，只用一天时间做14次试验就把问题解决了．否则就要成月成年的时间了.

再补充说明一下这样分析的用意：三种配比有时会误解为三个因素，实际上只有两个因素（变数）是独立的.

酸洗的时间长短，不是因素而是指标，就是说，该时间不是自变数，而是因变数.

采用“优选法”的同志必须注意：在分析问题的时候，要弄清楚到底有哪些是独立变数，经验告诉我们这都是易于发生的错误．还必须再强调一下，在分析出哪些因素是独立变数之后，还要看其中哪些因素是主要的.

§7.4 普及推广成果概述

在过去的20年里，华罗庚教授在继续纯数学的理论研究之外，又大力从事于数学方法对于国民经济的应用．他领导了一个由数学工作者，技术人员和工人所组成的小分队，到过全国23个省市，下到成千上万个工厂去进行普及推广工作．用这种办法，他成功地把许多有用的数学方法直接交到普通工人师傅手里，并应用在生产上取得了显著的经济效果．他在这项工作上所花的时间和精力，毫无疑问，不比他在纯数学的任何一个领域里所花的来得少．由于这个原因，我们觉得在这本选集中应当收进一个说明他在这方面的贡献的简表．由于这种成果遍及于许多不同的行业和部门，所以不可能详细地一一叙述它们.

纺织*

1．提高2014纱卡的质量.

2．解决美丽绸退色的问题.

---

* 原载 Loo-Keng Hua，Selected papers．Springer-Verlag，1983.

3. 提高织机的效率.
4. 提高细纱的单产.
5. 提高涤棉布热定型的效率.
6. 减少细纱的断头率.
7. 改进滚筒表面的状况，减少缠纱的现象.
8. 锡林动平衡问题.
9. 提高染色质量，节约原材料.

电子

1. 试制新的 160 V 电容器.
2.100 万米废铝丝复活.
3. 提高晶体管防潮漆的抗潮性能.
4. 调试 XD_1 信号发生器的功率放大器.
5. 解决 BP-3 宽频谱分析仪的源电压波动问题.
6. 回收稀有金属钽.
7. 提高在制造钽电解电容器中钽粉的利用系数.
8. 改进单晶硅衬底的质量.
9. 控制铝膜的厚度.
10. 高纯铝箔的退火.
11. 提高点腐蚀工艺的质量.

冶金

1. 提高球磨机的效率.
2. 改进浇铸 H80 焊条钢中铝封顶的效果.
3. 克服熔炼 Si-Cr 硅铬合金中的技术障碍.
4. 减少电炉炼钢的时间.
5. 提高 2Cr13 不锈钢的质量.
6. 提高钴的产量.
7. 提高钛的产量.
8. 改进硅钢片涂层的质量.
9. 提高三辊冷轧管机的产量.
10. 减少 $\phi500$ 轧机的废品率.

11. 提高金属锰的回收率.
12. 解决由于钢锭收缩产生的孔隙的问题.
13. 延长炉龄.

煤矿

1. 合理安排，提高煤的产量.
2. 调整联合采煤机的参数，提高机器效率.
3. 减少炸药消耗，提高采煤工作面的单产.
4. 提高精煤回收率.
5. 提高圆环锚链和连接环的破裂强度.

电力

1. 恢复汽轮发电机组的输出.
2. 提高锅炉的效率.
3. 改变工业供水系统.
4. 调优供水泵的运行.
5. 实现在开机并列时的自动频率调节.
6. 降低汽轮机轴承的温度.
7. 提高移动床软化水的效率.

通讯和交通

1. 组织铁路施工.
2. 提高车站的装卸率.
3. 降低车船的燃料（油料）消耗.
4. 改进气象导航.
5. 组织泸州长江大桥的施工建设.

建筑和建材

1. 建筑工程的组织.
2. 建筑工程的预算.
3. 桥梁工程的组织.
4. 提高纤维板的产量.
5. 降低聚氯乙烯胶泥的成本.
6. 提高混凝土预制板的产量.

7. 提高水磨石制品的质量.
8. 提高膨胀珍珠岩的膨胀系数.
9. 降低矿渣混凝土的成本.
10. 试制多硫化钙溶液.
11. 提高离心浇注混凝土管的效率.

食品·粮油加工

1. 提高大米加工中的出米率.
2. 提高油料加工中的出油率.
3. 提高小麦加工中的出粉率.
4. 提高酿酒工艺中的出酒率.
5. 提高糖的回收率.
6. 提高饴糖的产量.
7. 降低细挂面的再加工率.
8. 提高由麦芽制糖的出糖率.
9. 提高豆腐质量，降低大豆消耗.
10. 提高糖果的质量.
11. 提高猪毛溶解工艺中蛋白的得率.

设计

1. 设计无线电网络.
2. 设计滤波器.
3. 设计补偿器.
4. 在给定地形上的机场的设计.
5. 光学设计.
6. 行星齿轮的设计.
7. 无线电发射机的频带的设计.
8. 电路开关的设计.
9. 水样采集器的设计.
10. 多级提水站的位置的设计.

化工

1. 提高液晶对温度变色的灵敏度.

2. 提高癸二酸的质量.

3. 提高双氰胺的回收率.

4. 提高活性炭的产量和质量.

5. 延长辛烯醛加氢（触煤）反应中催化剂的寿命.

6. 在锆氟酸钾生产中，节约原料硅氟酸钾.

7. 提高抗氧剂 1010 的回收率.

8. 改进精馏塔的分离系数.

9. 提高糠醛的产率

10. 提高苛性碱的回收率.

11. 增加来苏尔的产量.

12. 在硫化碱的生产中，提高产量，节约原材料.

13. 减少电能消耗，增加碳化钙的产量.

14. 增加造粒塔的产量.

15. 增加气体发生器的产气量.

16. 增加磷肥的产量.

石油

1. 提高破乳剂 GP 122 的效能.

2. 提高原油脱水的质量.

3. 提高在常减压加工中，减压塔的总产率.

4. 计算油井的最大产能.

5. 提高化学清腊中的溶腊率.

6. 优选锅炉运行的最佳条件.

7. 降低厚油的粘性.

8. 选择地震资料基地的回放仪滤波因素.

9. 增加微球硅化铝（催化剂）的产量.

10. 用铂重整法试炼新油种.

11. 提高抗凝剂 605 的质量.

轻工业

1. 提高热水瓶的质量.

2. 增加肥皂的产量.

3. 提高纸张的质量.

4. 提高鞣制皮革的质量.

5. 增加皮鞋的产量.

6. 提高 10W 萤光灯光效.

7. 增加卷烟的产量.

8. 提高罐头内涂料的质量.

9. 提高鸭绒分离机的效率.

10. 利用干枯变质木材生产火柴.

11. 提高锦纶丝的产量.

12. 增加特种甘油的产量.

13. 改进 TiF_2 玻璃的质量.

机械制造

1. 提高各类机床的加工效率和精度.

2. 挂轮间的最优逼近.

3. 砂轮的静平衡.

4. 提高落地镗床镜面标尺的光洁度.

5. 提高球墨铸铁的质量.

6. 提高法兰盘加工的质量.

7. 快速镀铬.

8. 提高电泳镀漆的质量.

9. 各类切削工具的淬火工艺.

10. 齿轮平面表面的高频淬火工艺.

11. 振动膜的热处理.

12. 不开坡口单层双面埋弧自动焊接.

13. 用 3S 铬钼钒加工钻头.

14. 氧气瓶的收口成型.

15. 无氰镀锌工艺.

16. 降低高炉的焦铁比.

制药

1. 优选酰化反应时间增加扑热息痛的产量.

2. 提高海带提取碘的得率.

3. 降低磺胺嘧啶的成本.

4. 增加敌百虫农药的产量.

5. 改进四环素的压片工艺.

6. 提高甲醇钠的产量.

7. 提高土霉素盐酸盐的回收率.

8. 在呋喃类药物生产中，节约原料.

9. 提高磺胺嘧啶的发酵指数.

§7.5 评论之十七(卡斯帕·施威格曼,张树中)

华罗庚的教导对今天还是挑战吗?

本文的写作是为了再一次引起国际科学界对中国伟大的数学家华罗庚的工作和生活的注意. 他领导中国的数学科学，经历了巨大的政治动乱时期，重新确定数学研究方向，倾注了极大的努力于数学的普及工作. 在群众运动中，他教导成千上万的中国工人，怎样在自己日常的工作中去运用简单的数学方法. 本文将着重探讨华罗庚对群众所作的数学传播工作，而不是他的理论工作.

我们相信这事值得他去进一步注意是有其各种原因的. 首先，他的生活和工作说明了科学和政治发展间的相互影响. 这是一个双向的影响. 在应用数学上，他的工作受到了中华人民共和国的社会和政治发展的很大的影响，同时，他的工作也影响了政治进程. 社会政治发展和科学之间的相互影响仍旧是一个重要的论点，虽然在这个论点上的争论，似乎已经淡化了当时的背景.

是什么决定着科学发展和研究议程呢? 面对人类的严峻问题：诸如环境退化或发展问题，也许要求更自觉地去选择科学活动的方向. 华罗庚的生活和工作揭示了他所作的影响深远的选择，这些选择虽不明显，却留下了争论.

第二个要讨论的题目是在数学家中存在一种固执的偏见，那

就是只有纯粹数学需要最高水平的智力创新，而数学在实践中的运用，则是低标准的，构不成对出色科学家的挑战．华罗庚在数学应用上的工作，在现实世界上展示了更多的创造力和智能．

最后，但并非最不重要的，我们试图去说明当时华罗庚在群众运动中处理过的应用典型，并有批判地去讨论他的成果的价值．

我们将从中国政治发展的来龙去脉中，将俯瞰华罗庚的生活和工作作为开篇．在“一些必要的条件”一节中，我们试图说明华罗庚为什么在他的群众运动中能取得如此的成功．在随后的一节中，我们将阐述在群众运动的年代中华罗庚的学说．我们从他在工业化过程中且又是发展中国家中的工作与生活所得教训的评价做为结束语，文中将引用作者之一在非洲的经历．

生活和工作

萨拉夫在其著述中，对于中国直到1972年的政治发展和华罗庚在其中的作用给以很大的关注．此外，还出版了许多有关华罗庚生活的文献评论．

华罗庚出身在中国一个贫穷的家庭．他于1910年11月生于江苏省的一个小县城金坛．九年的中小学学习后，他的父亲让他去上海职业学校学会计．一年半后，他回家帮他父亲经营一个小杂货店．在他的九年学校生活中，华罗庚是一个讨嫌的孩子，其成绩报告单上还不是好到给人能有强烈的印象．他的数学作业并不工整，而满是改动——他总是在寻求不同的、但更好的求解方法．

他在数学上的天资，最初是被学校的数学教师王维克发现的．当华罗庚在上海作短期逗留回到家之后，他的父亲对他在小杂货铺里的工作很不满意，因为他似乎更着迷于阅读不相干的数学书．王维克在学校中为华罗庚安排了一个差事，这份工作只是清扫教室，在有需要时帮帮其他教师的忙，而这却给了他阅读王维克提供给他的代数、几何、微积分等书的机会，他当时大约

18 岁．一年后，他得了伤寒，医生认为他已无望有救了，但他幸存了下来．尽管疾病在他的余生中给他的左腿留下了跛瘸．这个时期对他的生涯是甚为残酷的．首先，他变得确信由于他的虚弱的身体和贫困的物质条件，从事数学对他已是仅为合适的职业，其次，他已养成了靠自己去学会每件事的风格．这以后，他总是在他的教学中强调独立思考是非常重要的．虽然他天资极高，但也总是在他的成就中推崇他的勤奋和学习方法．

1930 年，他读到苏家驹教授在上海一份杂志上发表的一篇论文，论文是关于五次多项式求根的解法．华罗庚发现了论文中的错误，并向《科学》杂志（上海）投去了题为“苏家驹之代数的五次方程式解法不能成立之理由”，该文在杂志上发表了．这篇论文写得虽不规范，但是极为清晰和简明．这篇论文打动了熊庆来教授，熊当时任清华大学数学系主任．当熊庆来教授了解到华罗庚没有受过正规的数学教育时，他更是十分惊讶，并邀请华罗庚到清华来．起初，华罗庚在清华的职业与在他家乡学校原先的工作没有多大差别，他任图书馆的管理员．有许多关于他在图书馆读书的特殊方法的故事．他取到一本书，读完目录和绪论，然后关上灯，想象着自己来写这本书．过会儿之后，他再与书本对照．用这个方法，可以很快地从头到尾通晓所有的主要论点，并享受更多读书的乐趣．不久，他开始在系里学习高等课程．只用一年半的时间，他就读完了全部课程，并且成了讲师．这在等级森严的社会中是极不寻常的，因为华罗庚没有大学文凭．

在这里，华罗庚在堆垒数论上产生了兴趣．他曾一次同时寄出三篇论文给国外杂志并都被采纳发表了，他闻名国外．1936 年，哈代邀请他访问剑桥，他在那里呆了两年．哈代劝他去完成博士论文，但是华罗庚决定不这样干，因为他怕这样会限制他的学习．实际上，直到 1979 年华罗庚在法国南锡接受荣誉博士前，他没有得过任何大学的学位．他在剑桥学习的方法是有特色的，他坚信，这可能是非正统的，但沿此道路学下去，肯定是最有用的．在剑桥期间，他对数论的许多问题做了研究，并发表了十多

篇论文，其中一些至今还是十分重要的.

1938 年，日本侵略中国. 华罗庚感到祖国需要他，他取消了访苏的计划回到中国.

1938 年到 1945 年，他在中国南部云南省昆明市的西南联合大学任教授. 这所大学是由被日本侵占了的北京大学、清华大学和南开大学合并组成. 八年抗战期间，这是很少的中国高等学府之一，许多著名的中国科学家曾受教于此. 昆明虽未被侵占，但也经常遭到轰炸，工作条件极其艰难. 他的一些重要工作就是在这个时期完成的，比如，他的名著《堆垒素数论》，虽然该书在多年后才在中国出版.

1946 到 1949 年，他在美国工作，起先在普林斯顿，然后在伊利诺斯大学，他与其他几位年轻科学家都是由蒋介石的国民政府派往美国的. 国民政府派遣这些科学家到美国去提出的一些要求是希望他们在核科学上，能够获取高技术知识，但是，没有理由相信这种获取是可能的. 在这个时期，华罗庚在数论和其他许多课题上，诸如群论和多复变函数方面，写出了卓越的理论论文.

当毛泽东赶走了蒋介石，1949 年创建了中华人民共和国，华罗庚作出了回到中国的选择. 在致所有在美国的中国留学生的公开信中，他试图说服他们也回到祖国. 他说道："外国的花园绝不可能是你自己的花园"，新中国需要他们的技术.

1950 年，华罗庚回到中国. 不像他的某些回国的同事，华罗庚受到很好的接待. 他被任命为清华大学数学系系主任（译者注：未有此任命），两年后，他又成为刚组建的中国科学院数学研究所所长. 像所有大学的教职工那样，华罗庚很快地卷入了思想改造运动. 大学生和教师们都组织起来学习马克思列宁主义和毛泽东思想，剖析自己的行为和态度. 这些年中，华罗庚写了一篇文章，包含了许多自我批判. 他在这篇文章中写道："我们只有一个传统，为人民服务的传统."华罗庚批判中国教育中劳心者治人的传统体系，以及中国学术研究向着西方国家的倾向性.

他强烈要求学生破除利己的传统而为人民服务．他为自己的错误而感到歉意，在个人改造的过程中认识了共产党的领导．他宣布他决定向群众传授科学技术的基本原理．

在50年代初期，华罗庚继续着他的理论工作，出版了三本著作：《堆垒素数论》、《数论导引》和《多个复变数典型域上的调和分析》．那些年中，理论著作在中国还得到重视，其第三本著作在1957年获得了中国科学院的自然科学一等奖．同时，他在报纸和杂志上写了关于教育的文章．他写道：学习是一个渐进的过程，而非重复的过程，在中国，这种重复是教育的致命伤．大学生在科学研究过程中，面对障碍时需要独立思考，并有勇气去创新．他为扎实的、勤奋的和富有创造性的工作而辩护．

在那个时期，华罗庚代表中国到国外出席各种会议，诸如1954年的世界和平理事会和亚洲国家的新德里会议．1956年，他被选为中国民主同盟中央委员会委员．民盟的主要成员包括了不是共产党员的知识分子和艺术家，民盟起着团结中国国内外的非共产党员，被称为统一战线内的在共产党领导下的"民主党派"的作用．

第一个五年计划（1953—1957）期间，是中华人民共和国享誉其最繁荣的时期之一．1956年和1957年初，被称为"百花齐放"的运动开始．这个运动是由共产党发动的鼓励知识分子讲话并提出批评，并说这将帮助党，许多知识分子作了响应．中国民主同盟建议国务院：大学生应根据他们的专长来分配工作、科学家应该从过重的社会和政治活动中解脱出来．后来，这些意见和其他建议与批评一起被认为是反社会主义和反对党的领导的．随后是大规模整知识分子，后来成为反右运动，成千上万的知识分子和高校学生受到人身攻击．作为自学成才的专家，华罗庚在这个大的政治骚动中设法对付，幸免于难．他再一次做了自我批评的公开声明，当时确是十分沮丧．华罗庚继续当着中国民主同盟中央委员会委员，并以这个身份参加了第二届代表大会（1959）．他到1979年才加入中国共产党．

1959 年，华罗庚被任命为新建的中国科学技术大学副校长，该校是在 1958 年由中国科学院中分出来，其目的在于培养大量主要从工人阶级家庭出身的大学生，以尽快地促进中国的现代科技. 那个时期，华罗庚写了几卷教科书《高等数学引论》. 这几卷书简明而饶有兴趣，并不失严谨. 它们在中国吸引了大量的青年人.

50 年代后期，中国的经济生活经历了一些变化. 毛泽东认为中国共产主义的发展将包含三个阶段. 初级阶段叫做“新民主主义”阶段，允许有私有制；接着是“社会主义”阶段，强调集体所有制；最终的阶段是“共产主义”，私有制和集体所有制都被消灭了. 在经济发展的那几年里，特别是 1958 年取得丰收后，毛泽东相信已经进入“社会主义”阶段，并且会很快通过这个阶段.

共产党宣布了三条意识形态路线，即“三面红旗”，其中之一是“大跃进”. 在三面红旗下，发生了许多变化. 人民的合作化运动强加于大范围内的农村与城市，开展了全国性的土法上马的大炼钢铁运动，许多不成熟的倡议被运用到国家的工业化和现代化建设中，工农业方面极其夸张的统计数字泛滥成灾.

紧接着在 1959 到 1962 年出现了严重的饥荒. 安徽省就有一些人死于饥饿. 这个危机被归咎于连续三年的气候恶劣、苏联逼还贷款以及 1958 年中苏两党关系破裂，苏联突然撤走专家.

许多科学家响应大跃进运动，力图为经济发展作出贡献，华罗庚是他们中间的积极分子. 当时，他以强烈的兴趣开始在中国将数学应用于实际技术和经济问题中. 1958 年他与他的一些学生一起，开始走访运输部门，推动运筹学方法的运用. 他引入了运用投入产出分析去编制国家经济计划.

就在那个时期，知识分子和大学生还被鼓励去从事体力劳动. 华罗庚和他的学生参加了农业活动. 这个经历导致他在农业中开始应用线性规划和图解法. 他为此作了大量的努力，对其成果作了大量的宣传，并开始了一场用大众化的语言去解释他的方

法的运动．他的运动的风格是中国特色的．在山东省的当地人群前，他生动地阐述应用图解法去解决线性规划问题．在车间现场会和无线电广播中，他用带韵的顺口溜和诗句，赞颂线性规划．

1963到1965年，中国的经济从危机中复苏．当时中华人民共和国主席刘少奇还主管着经济工作．他特别在城市里鼓励大规模的工业化；开始解散人民的合作化，并允许私人赢利活动．作为中国共产党主席的毛泽东掌握着意识形态大事，他强调农村的发展和农村中小规模的工业化．毛泽东和刘少奇都忧虑党内的修正主义和阶级敌人夺取领导权的危险．许多干部、知识分子和艺术家又一次被批判为试图复辟资本主义的"资产阶级分子"．这时，对知识分子的批判孕育了无产阶级文化大革命．

1958到1965年间，华罗庚和他的学生们在运输和农业领域里的试验活动的成功鼓励他去扩大他的活动．1965年，他和他的学生小分队一起，在中国经济的工业部门开展了一个传播简单的运筹学和统筹法的群众运动，并在实践中去完善这些方法．其后不久，在1966年，由毛泽东发动的，他称之为反对刘少奇的资产阶级司令部的无产阶级文化大革命开始了．一场长时期的政治动乱，直到1976年正式结束．华罗庚处在沉重的政治压力之下，度过了极为困难的时期．特别是在文化大革命初期，他的大量手稿，包括未完成的《高等数学引论》、《投入产出法》和《运输问题中的数学方法》都被查抄并遗失了．华罗庚与毛泽东有些个人接触，毛泽东曾几次写信给华罗庚，鼓励他继续为工农大众工作．粉碎"四人帮"后，华罗庚在他的一次演说中提到这些接触．毛泽东的保护帮助华罗庚度过了这些困难．

实际上，毛泽东是在教育界开始发动文化大革命的．他号召青年学生"造反"，向所有的权威、组织和领导者挑战．他认为以前的各次整风运动都没能成功地消灭存在于共产党内部的敌对阶级复辟资本主义的危险性．需要由群众起来对党的高层进行一场新的革命．群众性的"造反"导致全国性的混乱．没有一个组织机构还能起作用，没有一个人能置身于"革命"之外．共产党

的许多领导人受到"红卫兵"(高中或大学学生)的人身攻击,后来,迫害扩大到学术权威和其他人. 许多人受到攻击,当众侮辱,投入监狱或遭到杀害. 几乎有四年没有一所大学招收过一个学生. 不同的政治组织都宣称忠于毛泽东,而又互相战斗. 毛泽东后来说,文化大革命是他一生中干的两件大事之一,另一件是创立了中华人民共和国.

在这些年中,毛泽东提出了一个新的教育体制("五·七指示"). 学校要如公社那样组建,工业训练、农业训练和军训相结合. 组建了许多这样的"五·七干校"和共产主义大学. 毛泽东说:"教育要革命","教育必须与生产劳动相结合."“实践”这个词被荒唐地夸大了,说成在日常生活中每时每刻都卓见成效. 几乎所有的学术活动都被忽视和停止了,所有"理论权威"都受到迫害,所有传统的和学术的体系都受到批判和摒弃. 一个人接受的正规教育越少越好.

在文化大革命中,华罗庚继续为他的运用和普及数学方法的运动而奋斗. 他倾注精力于工业领域并不足怪,因为工业化被认为是发展的支柱,这不仅仅对城市重工业而言,而且还包括那些为农田机械化的发展提供装备的乡镇工业. 把工业作为农业发展的主导因素的政策,其结果是建立了大批新的工厂企业. 华罗庚和他的小分队跑了中国的数百个城市,走访了数千个工厂并开设了讲座. 与华罗庚合作共事多年的王元提到有数百万工人和职员听过他的讲演. 有时,一次讲座的听众超过十万人.

通常的做法是为了解决问题,小分队花一周时间去走访一个工厂,走访从参加工厂讨论生产问题的生产会议着手. 之后,再用一周时间,华罗庚在大礼堂作一个关于优选法和统筹法的讲座,接着,小分队下到各个车间去说明怎样运用这些方法. 小分队要在每一个省里解决 10,000 个问题. 这些工作为攻关数学家小分队提供新的实际问题不竭的源泉. 当时,华罗庚写了两本读物,《优选法平话》(1971 年出版)和《统筹方法平话》(1965 年出版). 优选法和统筹法不仅应用于工业,也应用于商业. 这个

运动是如此的普及，其读者几乎分布于整个国家的每个技术部门和研究院所．还制作了一部教育片叫做《优选法》，广为放映．没有任何数学家能够影响这么多的人民．

当“四人帮”被粉碎（毛泽东于1976年去世后），文化大革命结束，这个运动还在继续．邓小平在1978年主持工作后，宣布了开放政策．人民开始由政治斗争转向投身于国家的经济发展．在这个转变的时期，华罗庚的工作得到更多的赞颂．1983年，他还在世的时候，中国制作并播放了他少年生活的长达六小时的电视连续剧，在中国，对于一位科学家是无前例的．

1985年，华罗庚在东京讲学时死于心脏病．他写了十本以上的著作和200多篇科学论文，几乎每一个中国人都因他普及数学和优选法而知道他的名字，并认为他是一位民族英雄．

一些必要的条件

怎么才能说明华罗庚将数学带给群众所取得的卓越成功呢？

首先，他的个人素质显然是起决定作用的．华罗庚个人是自学成才，十分勤奋的．他自己缺乏正规的学院式的教育，他不更多地强调这一点，而一再鼓励自学．在中国的权威式的传统教育中不鼓励自学，它是建立在维护自然和社会的孔子儒学基础上的．学生们被培养为驯服的照本宣科，而缺乏自学能力的人．

另一方面，把复杂的事情以简单术语解释（包括数学在内）的思想是深深扎根于中国文化之中的．中国有句谚语“深入浅出”，这对学者和教师是一条原则．一个人应该学习深刻的理论，掌握它，并能使他人容易理解，华罗庚的教学正是如此的．

华罗庚普及数学的做法正好符合了毛泽东的教育思想．1935年出版的毛泽东的《实践论》一文中，深刻的批判了传统的中国教育中劳心者治人的属性．他建议教师“用大众化的语言讲话”，并“使你的讲话生动些”．在1949年9月21日召开的中国人民政治协商会议第一届全体会议上，毛泽东阐明了他的见解：“努力发展自然科学，以服务工业农业和国防的建设．……普及科学

知识."（《共同纲领》第四十三条）当然，华罗庚的例子都来自工作场所，取之于日常实践中.

华罗庚普及运动的进一步的贡献，还来自历史渊源. 中国因西方的武力、物质和心理战而蒙受屈辱. 数千年来，中国一直自认是文化中心，世界的“中央王国”. 到了 18 和 19 世纪，西方的武力显示出了更多的先进科技，中国完全被打败了，被迫去接受各种屈辱的条约，梦想似乎已成为过去. 面对西方意识形态和技术发展的混合感受有一种自卑感，而同时，由于各种原因，也有一种优越感. 中国人了解到极大地依赖于现代科技的军事能力的重要性，强烈的愿望是要尽可能快地赶上西方实力. 特别在中华人民共和国建立以后，这种期望便赋予了共产党，中国人民因此以极大的热情支持党的政策. 在这种情况下，华罗庚的目的在于增加生产力的群众运动被热烈地接受了是不足为怪的. 当时的许多群众运动为华罗庚的运动提供了环境，而他的威信和他的运动的成功，又对这些运动的推广普及作出了贡献.

虽然华罗庚在他的作品中很少明确地表示他的政治观点，但他肯定支持毛泽东的一些思想. 例如，《优选法平话》第三章中论述到党的领导和联系群众. 当然，当时在中国，每一位作者都会表明他（她）对毛泽东思想和对党的领导的信念. 不过，华罗庚他本人献身于社会主义的发展和信奉毛泽东称作理论来自实践的观点，看起来是非常真诚的.

毛泽东将专家分为“红专”或“白专”，分别对应于“无产阶级”和“资产阶级”分子. 华罗庚被认为是“红色”专家，尽管毛泽东的追随者中也有些人批判他在培养青年研究人员中，过多地强调数学业务. 甚至他在纯粹数学方面的工作，也作为缺乏实用价值的理论的典型例子而受到批判. 据说，华罗庚在文化大革命的十年中没有进过图书馆，而只有深夜在家里做一点理论研究.

优选法和统筹法

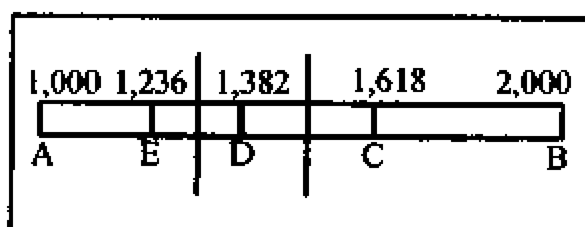
我们将在本节中来阐述华罗庚在工厂中进行数学讨论的典型：优选法和统筹法.

在公开的演讲中，华罗庚集中讲解求一个变量函数的最大值或最小值的方法，一个与为数众多的工业应用有关的典型的优化问题．例如，求在最少时间里完成一定质量的产品所对应的函数的最小值；求在规定时间内完成最高质量的产品所对应的函数的极大值．一个求函数最小值的清晰简单方法的思路，可能在改进质量上有用，或者在工业中能增产，确实很具吸引力.

可是，即使这种典型的技术问题，在实际中都是很复杂的．通常，影响产品质量和加工时间是多因素的．而且，质量通常又以若干个性能为特征的，改变一个性能，常会恶化另外的性能．华罗庚很了解这一点，在他的读物《优选法平话》最初的例子中即予以讨论．他例举小卖部中做馒头（中国人常吃的食物，一种蒸熟的小面包）的问题．苏打是主要的添加剂，影响着馒头的味道．苏打的含量应是最佳的．但是如何优化呢？每个人有不同的口味．他建议每天用不同的苏打含量来做馒头，并征求买主对馒头的评估意见．用此方法，他取得优化指标．他注意到，实际中不仅苏打，还有其它因素，如发酵粉、面粉的品种等，都影响口味.

说明华罗庚的优选法在提高中国工业生产上的实用价值的许多例子，收集在中国科学院 1997 年出版的专题著作中．本节末，我们将引用一点．我们注意到在文化大革命后期出现的出版物中，还具有强烈的宣传影响.

在华罗庚的优选法中，黄金分割法，在中国即为著名的 0.618 法，起了重要的作用．作为说明，他讨论了按照某种标准去进行一系列试验，求在一吨钢中优选碳的数量（已知在 1 000 到2 000克之间）．他要听众在心中记住一个数：0.618．然后他取一张纸条，在两端 A、B 处标上 1 000 克和 2 000 克(见下页图).



黄金分割法的说明

AC的C点是以0.618乘AB的长度得出，标上1.618于1,618的点，用1,382克标注于D点．对应于C和D，用含碳量1,618克和1,382克做两次试验．若用1,382克做的试验得到较好的结果，则将纸条在1,618处的右段撕去．他再在余下的新纸条中间对折，对称于1,382，得到E点，注以1,236克．再以含碳量1,236克进行新的试验，比较用1,236克和1,382克的试验结果．若1,382克的试验给出了较好的结果，纸条从1,236的左段又可以撕去．这个过程继续到试验结果的差别已足够小为止．他表明了纸条的长度每一次都留下原长度0.618倍．这实际上就是最优点．

在他的读本中，华罗庚讨论了需要考虑多因素（变量）的情形．实际上，他论述了两因素的情形，他用一张方纸片，以其两边对应此两因素来加以说明．在一个或两个因素的情形中，一般要求目标函数为凸函数．华罗庚尽可能不用专门术语予以说明．此外，在他早期的普及读物中，他介绍了许多方法，诸如陡度法和某些其它简单的直接方法（未作推导）．他还说明怎样去处理在同时允许进行多个试验的情形（平行试验）．在他后来的著作《优选学》中，还提供了许多数学证明．华罗庚常常提到毛泽东的教导："研究任何过程，如果存在着两个以上矛盾的复杂过程的话，就要全力找出它的主要矛盾．捉住了这个主要矛盾，一切问题就迎刃而解了．"（《矛盾论》）基于这点，华罗庚建议处理一个复杂的实际问题时，对其所有可能的影响因素要加以分析，并按其重要性进行分类．略去那些次要的因素，就会得出仅在小范

围中的问题. 这样在许多情形中却已经给出了满意的结果. 实际上，他主张快且有效的直观推断方法. 在许多公布的例子中，这种逼近法确实是很快而且非常有效的. 在他的读物中，华罗庚声称他的优选法的研究为共产党提出的“多快好省地建设社会主义”的目标提供了方法.

统筹法涉及到计划管理中的问题. 在一个计划中，几个任务要去完成. 任务有先后次序的制约，每项任务的实施都要求在一定的时间内完成. 为了在最短时间内完成整个计划，每项任务应按怎样的顺序来执行呢? 统筹法包括关键路线法（CPM）、计划检查评审技术（PERT）等等. 华罗庚在他的《统筹方法平话及补充》中用泡茶这个简单的例子来介绍这类的问题. 水要烧开，茶壶和茶杯要洗. 为了节约时间，有着安排工作的显而易见的方法. 他画了一张表明工作及其关系的网络图来描述这种情形，很容易就为听众接受了. “这是小事，却是引子，引出一项生产管理等方面有用的方法来.”他解释说：“但稍有变化，临事而迷的情况，确也有之. 在近代工业的错综复杂的工艺过程中，往往就不能像泡茶这么简单了. 任务多了，几百几千，甚至有好几万个任务；关系多了，错综复杂，千头万绪，往往出现万事俱备，只欠东风的情况，由于一两个零件没完成，耽误了一架复杂机器的出厂时间. 也往往出现：抓得不是关键，连夜三班，急急忙忙，完成这一环节之后，还得等待旁的部件才能装配.”这些讲演给许多人留下了深刻的印象. 他们在自己的日常生活和工作中，很容易接受这些“巧妙的方法”.

优化与规划的方法既直观又易于了解，用到的数学都是初等的. 华罗庚从不去解释像积分求导这些困难的数学概念，而是帮助人民去开发优化与规划的意识.

关于群众运动的成果有大量的报道. 在华罗庚的读物中有下面的例子，是由上海精炼油厂报道的.

1969 年末，我们接受了寻求降低某种润滑油凝点添加剂的研究任务. 据我们所知，这种添加剂由五种物质组成. 添加剂的

成分对凝点影响很大，添加剂在油中的数量对结果也有影响，利用我们自己的经验和国外的文献，我们已经按照国外文献指出的范围，在半年中做了100次试验．最好的结果是使凝点从－16℃降到了－42℃，我们认为这已是最后的结果，并打算中止试验．正在那个时候，华罗庚同志来推广优选法．我们仅用了两个多星期，做了十多个试验，凝点进一步降至－46℃．过程如下：

我们发现添加剂的成分是这个事件的关键因素．对于降低凝点，似乎添加剂越多越好，但是添加剂超过5%以后，效果就不明显了．因此，我们确定添加剂的量为0.5%．我们进一步发现这五种物质中，其中的两种可以被忽略不计．所以，剩下的三种物质A、B和C之和作为100%，这样，此问题简化为两因素问题了．

首先，把A的量固定为25%．根据经验，B的数量范围从0.100到0.600mol．应用优选法来决定B的数量，我们找出B的数量为0.134mol，并试图去找出A的最佳的数量．最后，我们找出它仍然在25%附近（指重量）．

在1977年中国科学院的专题著作中，共列入了451项应用．工厂报道的应用，都声称有成功的成果．我们在此引用两个例子来说明此情况．第一个例子是首都钢铁公司的龙泉坞石灰石矿的分离，题为“用优选法求炸药的成分”．

在我们矿区，我们通常使用NQ2岩石炸药，其价格昂贵，也难以弄到．后来，我们应用其它炸药，但由于其爆破力低，结果不甚理想．因此，我们矿区的工人就运用0.618法，去试验铵——煤炸药的成分、柴油和锯末的正确成分、找到了下式的比例：硝铵/柴油/锯末＝100/3/6.5．由此得到的炸药的爆破力，与NQ2岩石炸药大体相同，但其价格便宜三倍．每次爆破可为国家节约12,000元，全年可节约300,000元．

另一个简短的报道，来自边远地区关西的一家火柴厂．

每年，我厂大约有1,000m^3用于生产火柴的木材因过干而损失．然后，只能用做生火的劈柴，造成很大的浪费．我们运用

优选法来调节温度，以保持木材的湿度，还调整了相应的加工过程．其结果是，用这些木材生产的火柴，质量达到国家一级标准．优选之后，从 1974 年底到 1975 年底，我们用先前废弃的 1,000m^3 木材生产了高质量的火柴．节约了 38,000 元．

事实上，推广运动的普及还见诸在文化大革命中及其后出版的推广优选法的大量书籍中．在华罗庚和他的小分队的读物，以及 1977 年科学院编辑的应用文集里，展示了许多应用实例．许多省市编辑了关于优选法及其实例的书籍，大多数省和大城市都有自己的“推广优选法办公室”．

讨　论

中国的政治变革极大地决定了华罗庚后半生科研的方向．另一方面，华罗庚又以他的工作和他的科学威望，对政治思想的贯彻施以巨大的影响．他的名望是由于他首创和开拓的活动，并造就他成为英雄．同时也给了他在政治方面的权力．

华罗庚是一位意志坚强的独立思考者，并在作为一位独立的科学家的作用和由党和政府需要他所做工作的政治需求之间，建立了一种平衡．作为一位身居高位并富有威望的知识分子，他身负重任不仅由于他成功的传奇，还有这些传奇所带来的政治作用．世界上许多数学家受到华罗庚“数学为了群众 ”的挑战．尽管我们有很好的理由去赞美他在数学普及工作方面的开创思想和积极性，但对华罗庚的功绩进行充分评论，还依赖于对他的政治作用的评价．在这儿，我们不做这方面的评论，也不去评说他所支持并为其做出贡献的政治体制，该政治体制对所造成的许多灾难、失败和错误负有责任．

华罗庚某些方面的工作在他所处的时代，在特定意义下是重要的，而有一些工作则具有永恒的意义．华罗庚实践的重要性取决于中国工人相对低的教育水平和工业的技术落后．那些群众运动的简单重复在今天已不合时宜，因为实践的主要目的之一，在很大程度上是服务于现在的中国国家教育体制．

华罗庚及其小分队在应用数学的普及方面的论著，主要是论述数学方法的．这些论著使人着迷，表明了用简单的语言去说明数学方法是多么的困难．的确，这个任务或许只可能由一位伟大的数学家来完成．

华罗庚称他的探索为数学的普及．尽管在他的论著中发展了许多传授知识的有价值的思想，他明确分析了无处不包含的教育原则．某些关键词（重新创造、发现、直觉方法等等），在华罗庚的论著和数学教育的标准著作中都出现过，但其内涵则大为不同．华罗庚不是向大学生讲演，普及的对象几乎是没有任何数学背景的人．虽然数学教育在许多国家都在增多，但仍有许多人对数学不熟悉．他们能从华罗庚和他所普及的数学方法中获益．

华罗庚及其小分队在几千座工厂的数学普及运动中的经验已无法详细列举．我们不知道有多少问题是得到验证的，有哪些问题能真正构成优化和规划问题，哪些成果在实施或由组织上的牵制而实施受阻等等．华罗庚他自己说起过他非常遗憾，没有时间去详述现场经验．完全有可能有成果不太满意的报告，因为实践中的大多数问题比华罗庚和王元的著作中提到的要复杂得多．无论是一个小车间或一个大工业企业，生产计划都需要比单独的运筹学技巧有更广阔的各种技巧．通常，将许多重要的因素都纳入到数学模型中会有很大的困难：等级制度的决策关系，不确定的需求与供应等等．数学模型可能起重要的但仅仅是局部的作用．实际的答案，只可能是现场的计划者和技术人员与数学建模者之间相互作用结合过程的结果．遗憾的是，华罗庚和他的小分队肯定面对着数百个想不到的问题，而没有写它们．我们仍然要对华罗庚所做的事情的某些给人深刻印象的成果，给以充分的称赞．的确，人们开始意识到，他们能够增加生产，工人和技术人员在一个大范围内开始增加生产的试验．

最近的 20 年中，在工业化国家，社会的数学化发展很快，个人的计算机已起到重要的作用．在工业、农业、金融和公用事业上，运筹学和统计技术学研究的作用已受到严厉的批评：它太

复杂，太理论，从事研究者不懂得实际问题，不确定性导致模型的价值有限等等．不同领域专家之间的交流，专家与非专家之间的交流变得极为重要．我们需要找出或者至少试图去找出，互相之间理解的共同语言．华罗庚的实践向我们表明，建立这种桥梁是可能的．这或许就是华罗庚对未来时代最重要的教导．他能与外行在工作现场交流，在与技术人员交流时，他不仅是上乘的教师，而且对解决重要实际问题产生了极大的兴趣．这些实际问题对华罗庚和他的小分队来说是强有力的挑战，并对它们运用了他们所有的智力和数学技巧，使实践和理论之间的结合成为现实．

尽管解决问题的数学技能也许最初是在具有文化水平技术的大规模工业生产中被发展起来的，但中国的经验已经表明数学技能同样能够在低技术情况下做很多贡献．这一点对发展中国家可能特别重要．许多问题是严峻的：如贫困的社会基础结构，危机的粮食生产，贫缺的市场结构，信用体系的缺乏等等．在学术研究的团体中，很少有懂得贫穷必经奋斗的问题．乡村组织，农民的合作社，政府部门的地方机构，以及其它的地方实体，不是总能接近那些金融决策的研究机构．此外，他们常常很缺乏需要追赶上具体研究建议的经验，特别是当研究包含着数学时．还有在日常生活中发生的许多问题，有研究工作也许可以很好地解决像数学模型和运筹学在这里可能做出有价值的贡献．

华罗庚和他的同事们号召数学家、统计学家和其他科学家，从他们通常埋头于大学的课堂里，走下来到现场去．这并不需要按华罗庚的群众运动那样去做．

让我们用在坦桑尼亚的达累斯萨拉姆大学的经验来加以说明．为了使运筹学课程尽可能地贴近实际，这所大学的大学生几乎都来自农村，假期中回去在他们的亲戚、邻居和乡村的工作人员的帮助下，对自己村庄中的农业问题做些分析．他们论证与银行签订贷款合同是否有用；是否应当得到牛拉犁；是否是最佳的播种期，是早一点或是晚一点，着眼于劳力的安排；为集体农场应当标定多少英亩土地，以及其它许多事情．有一个例子：坦桑

尼亚粮食和食品中心进行粮食和农业结构的大规模规划时，他们要向村民们建议种植玉米的土地面积的规模，因为玉米是农村的主要食物.

我们考虑某一个村庄，根据其居民的人口和组成，估计其年玉米的总需求量：γ 千克. 假设平均的玉米产量也可以估计：μ 千克/公顷. 若在该村每年种植玉米总的土地面积等于 γ/μ 公顷，则在多少年内，玉米的短缺将会发生. 为了减少短缺的数量和频率，多用些土地来种植玉米，但是问题是：多种多少为宜？是比 γ/μ 公顷多种 10%，30%，甚至 50%？答案决定于两个因素，玉米短缺的风险到什么水平是可以接受？关于产量的变化规律，特别是低产的概率，知道多少？

令 y 表示玉米每公顷的产量，模型化为一未知的累积分布函数 $F(y)$ 的随机变量. 令种植玉米的土地面积是一个判定变数，用 x 表示；则粮食的短缺用 $Z(x)$ 表示，可以写为 $Z(x) = \max(O: \gamma - yx)$. 假若人们需要去接受发生短缺的最大概率 α，很容易看出，x 至少应该为 $\gamma/y\alpha$，其中 $y\alpha$ 适合 $F(y\alpha) = \alpha$. 这似乎是一个合理的逼近，但常常导致 x 的高值. 此外，什么是 α 的适当选择呢？这个逼近的另一个弊端是短缺的规模未被计入.

一个选择是以劳动价值对短缺后果的平衡为根据的. 若耕作 1 公顷玉米的劳动价值为 ω，并令 $\omega = c\mu$，式中 c 为生产 1 千克玉米的平均劳动价值；进而假设每短缺 1 千克，购买的代价为 ρ. 耕作面积 x 所需的劳动，可以等价于“劳动价值” $c\mu x$；购买短缺的价值为$\rho Z(x)$. 耕作面积 x 的年“价值”的期望值为

$$g(x) = E(c\mu x + \rho Z(x)).$$

对于 $g(x)$的计算，必须知道玉米产量的概率分布 $F(y)$. $F(y)$的估计根据对产量的观察会更好些. 如果没有，或者只有一点点产量数据可得到，从农民那里收集产量分布的信息是很有用的，即最少的、最多的和最可能的产量. 这可以作出 $F(y)$粗略估计.

使 $g(x)$极小化的 x 值，决定于 ρ 和 c，只要通过 ρ/c. 在短缺

的情况下，如果粮食是由国外空运进来，ρ 将增大．所考虑的这个典型可以导致 ρ/c 合理的估计．对于这一村庄 $F(y)$ 的估计，ρ/c 合理的一种选择为 3—6，将得出玉米的用地多 10%—20%．为了估算后果，人们也可以计算短缺的概率．若 x 取得比 γ/μ 大 10%(20%)，短缺在 10 年中约发生 4(2)次，平均短缺将为年需求量的 5%(3%)左右．这种类型的成果也在其它的例子中得到；只要期望的短缺保持相对的低值，短缺的高概率是可以接受的；作为一个判别标准，期望的短缺似乎比短缺的概率更为有用．

这些成果在大学中继续做下去，并由学生和工作人员讨论．这些研究使数学模型和简易运筹学方法取得富有成效的应用，提出了许多进行讨论的关键论点，例如，对村庄需求来说什么是最好的，而对政府并不是最好的；产品的售价并不总是合理地正比于农业劳动量；关于在市场不足而产品在力所能及的可能销售下，能做些什么；农民可以承受的涨落的世界市场价格本身的风险，或者可以较好地去接受一种由政府稳定但平均很低的收益，等等．大学生开始敢于用综合的方式去考察农村中的问题，数学研究提供了对问题给以分析的方法，在可供选择的计算结果与政治决策的讨论或政府措施的必要性之间相互作用，这样使得实际问题变得更为清晰．

这些研究当然不是万应灵药，它们通常只能有间接的效果．新的建议可以提出；已有的计划或思路可能得到支持或否决．实际上，解决农民的问题经常是一个非常复杂的过程；它可能要几年并事先作大量的努力，例如，为了接受一种新的农业方法而改变传统的实践．

在发展中国家，农民的创造性是为了改善生活条件，像合作农场，合作谷物银行的设置，等等，应受到大量的科学支持．最近，在西非柏克纳法索的中央高原建立了关于粮食保障方案的交叉学科的研究课题．目标之一是确定未来农田研究的重点面积．这归于在农田研究规划中集中围绕着农民共同的创造性，以克服在中央高原上的农业危机．在这些规划中，数学家和农民、访问

学者、进修人员、经济学家等等一起工作．那些准备在交叉学科小分队工作的数学家和定量科学家，在农民问题上产生一种意义深远的兴趣，有着强烈的需要．他们必须是数学非常好的，并且运用他们所有的智力去探索数学模型怎样能用于研究实际问题．再者，他们必须能够用普通的语言去说明他们做了什么，以及他们的成果是什么．简言之，需要的是华罗庚的信徒．

作为纯粹数学家和应用数学家，华罗庚都显示了伟大的创造力．某些人可能争辩说，他从纯粹数学向实事求是的应用的转轨对科学是一个损失．这不是我们的观点，实际问题作为永恒的河流给数学家提供了理论问题的丰富源泉．日常生活的问题甚至对纯粹数学家都可能是一种挑战的鼓舞．

致谢：作者对伦敦的罗哈普顿学院的戴维德·卡皮特博士、北京中国科学院的王元教授和钱德勒·戴维斯博士的有价值的评论致以谢忱．

（见 C. Schweigman and S. Zhang, The teachings of Hua Loo Keng. A Challenge today? The math. intel; Springer-Verlag, Vol. 16, 3, 1994, 36—46. 王克译，袁向东，张利华校）

第八章　关于经济优化平衡的数学理论

§8.1　引言

在社会主义市场经济的体制下，政府对经济的宏观调控及如何制订计划使各主要经济部门协调发展仍是非常重要的．例如，如果不注意电力的供应能力而建设了一批工厂，就会由于电力供应不足而影响生产，与其让若干工厂轮流停电，何不缓建一些工厂而投资于电力的建设．反之，如果电力多了，又没有储电的有效办法，就造成了浪费．进而言之，电力开发也是需要其他工业产品的；建电站要钢材，水泥，发电机，电缆等．建火电站，则还要煤及运输煤的手段等．总之，工业生产是一环紧扣一环的．当然处处都需要用人，而人要吃、穿、用，还要文化娱乐．因此，要处理这样一个把所有生产消费环节都考虑进去的大系统，制订协调发展的计划，即使数学方法再进步些，电脑再先进些，也是做不到的．还要靠市场的调节功能来进行调节．但给出将主要经济环节包括进去的经济平衡系统，并给出某种优化方案，还是有可能的，也是重要的．本章即讨论这方面的问题．我们先讲这一工作所需的数学工具，即非负矩阵理论．这一理论是由 G. Frobenius 与 O. Perron 建立的．然后讲它在经济优化平衡理论问题上的应用．当然必需指出，本章所讲的理论并未经过实践的检验，还是一项正在探索中的工作．

§8.2　非负矩阵的相似性

若矩阵 A 的元素都是非负的，就称为非负矩阵，以 $A\geqslant 0$ 表之，$A>0$ 则表示 A 的元素都是正的．进一步引伸，用 $A\geqslant B$ 表示

$A-B\geqslant 0$ 及 $A>B$ 表示 $A-B>0$.

若一方阵 Q,其中每行每列均只有一个正元素,其他元素都是零,则称 Q 为广义换位方阵.普通的换位方阵 P 的定义为 P 的每行每列均只有一个元素为 1,其他元素都是 0.例如对角方阵 $\Lambda=[\lambda_1,\cdots,\lambda_n](\lambda_i>0)$是广义换位方阵.易知任何广义换位方阵皆可以唯一地表成 ΛP.

命 A,B 为两个非负方阵.若有广义非负方阵 Q 使

$$QAQ^{-1}=B.$$

则称 A 与 B 相似,记为 $A\sim B$.

相似关系有以下性质:(i) $A\sim A$,(ii) 若 $A\sim B$,则 $B\sim A$,(iii) 若 $A\sim B$,$B\sim C$,则 $A\sim C$.根据这些性质,相似关系可以将非负矩阵分成等价类,每类中任二方阵均相似,不同类的方阵不相似.又可知(iv)若 $A\sim B$,$A\geqslant 0$(或 $A>0$),则 $B\geqslant 0$(或 $B>0$).

若方阵 A 相似于

$$B=\begin{bmatrix} B_1^{(k)} & 0 \\ B_2^{(n-k,k)} & B_3^{(n-k)} \end{bmatrix},$$

其中 $B_1^{(k)}$ 表示 $k\times k$ 方阵,$B_2^{(n-k,k)}$ 表示 $(n-k)\times k$ 方阵等,则称 A 为可分拆方阵,否则称为不可分拆方阵.若 A 可分拆,则由于

$$\begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}\begin{bmatrix} B_1 & B_2 \\ 0 & B_3 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}=\begin{bmatrix} B_3 & 0 \\ B_2 & B_1 \end{bmatrix},$$

其中 I 表示恒等方阵,所以一个不可分拆方阵的转置也是不可分拆的.

§8.3 标准型

若一个不可分拆的非负方阵 $A=(a_{ij})(1\leqslant i,j\leqslant n)$适合于

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij}=q,\quad 1\leqslant j\leqslant n,$$

则称 A 为标准型，其中 q 称为 A 的高标.

定理 8.1(Frobenius-Perron)　任何不可分拆的非负方阵 A 一定相似于一个标准型.若不计重排，则标准型是唯一的.

证　不妨假定

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} = q_j, \quad 1 \leqslant j \leqslant n.$$

及 $q_1 = \cdots = q_s > q_{s+1} \geqslant \cdots \geqslant q_n$，否则可以经列的重排使之满足这一关系.记

$$Q(A) = \max_i q_i = q_1.$$

我们首先往证可以选取对角方阵 Λ 使 $\Lambda A \Lambda^{-1}$ 中列和等于 q_1 之列数少于 s，其他列和均小于 q_1.记

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{pmatrix}.$$

此处 $A_1 = A_1^{(s)}$ 等.取

$$\Lambda = [I^{(s)}, \Lambda_1], \quad \Lambda_1 = [\lambda_{s+1}, \cdots, \lambda_n].$$

则

$$\Lambda A \Lambda^{-1} = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \Lambda_1^{-1} \\ \Lambda_1 A_3 & \Lambda_1 A_4 \Lambda_1^{-1} \end{pmatrix}.$$

由于 $A_3 \neq 0$，所以可以取 Λ_1 使

$$\Lambda_1 A_3 \leqslant A_3, \qquad \Lambda_1 A_3 \neq A_3. \tag{1}$$

同时使 $\Lambda A \Lambda^{-1}$ 的后面 $n-s$ 列的列和仍然小于 q_1.由(1)可知 $\Lambda A \Lambda^{-1}$ 的前 s 列中至少有一列之和小于 q_1.因此 $\Lambda A \Lambda^{-1}$ 的列和等于 q_1 的列数少于 s，其他列和则小于 q_1.继续这一步骤可使方阵的所有列和均小于 q_1，即存在 Λ 使

$$Q(\Lambda A \Lambda^{-1}) < Q(A). \tag{2}$$

其次，考虑满足下面条件的对角方阵集合

$$S = \{\Lambda = [\lambda_1, \cdots, \lambda_n]; \lambda_i > 0 (1 \leqslant i \leqslant n), \lambda_1 + \cdots + \lambda_n = 1\}.$$

由于

$$\Lambda A\Lambda^{-1} = \left(\frac{1}{\lambda}\Lambda\right)A\left(\frac{1}{\lambda}\Lambda\right)^{-1} \quad (\lambda > 0).$$

所以我们实质上已经考虑了所有的非负对角方阵 Λ. 命 q 为 $Q(\Lambda A\Lambda^{-1})(\Lambda\in S)$的下确界.若有 Λ 使

$$Q(\Lambda A\Lambda^{-1}) = q, \qquad \Lambda \in S.$$

则由(2)可知 $\Lambda A\Lambda^{-1}$的各列之和都等于 q,即 A 相似于一个标准型.否则,在 S 中有方阵贯

$$\Lambda_i = [\lambda_1^{(i)},\cdots,\lambda_n^{(i)}], \quad i = 1,2,\cdots$$

使

$$Q(\Lambda_i A\Lambda_i^{-1}) < q + \frac{1}{i}. \tag{3}$$

由于 S 是一个闭单纯形,所以 $\Lambda_i(i=1,2,\cdots)$有一个极限点 $\Lambda_0=[\lambda_1^{(0)},\cdots,\lambda_n^{(0)}]$,即在 $\Lambda_i(i=1,2,\cdots)$中可以选出一个子贯收敛于 Λ_0.不妨假定

$$\lim_{i\to\infty}\Lambda_i = \Lambda_0.$$

由 $\sum_{j=1}^{n}\lambda_j^{(0)} = 1$ 即可知不能所有 $\lambda_j^{(0)}=0$.不妨假定 $\lambda_i^{(0)}\neq 0(1\leqslant i\leqslant s)$, $\lambda_j^{(0)}=0(s+1\leqslant j\leqslant n)$.由

$$\sum_{j=1}^{n}\lambda_j^{(i)}a_{jk}\lambda_k^{(i)-1} < q + \frac{1}{i}, \quad 1\leqslant j\leqslant s, i = 1,2,\cdots$$

可知

$$a_{jk} = 0, \qquad 1\leqslant j\leqslant s, \quad s+1\leqslant k\leqslant n,$$

即 A 是一个可分拆方阵,矛盾,所以 $s=n$.命 $i\to\infty$.则由(3)可知

$$\lambda_k^{(0)-1}\sum_{j=1}^{n}\lambda_j^{(0)}a_{jk}\leqslant q, \qquad 1\leqslant j\leqslant n.$$

即得

$$Q(\Lambda_0 A\Lambda_0^{-1}) = q.$$

最后,我们往证标准型是唯一的.假定 A 与 $\Lambda A\Lambda^{-1}$都是标准型,其列和分别是 q 与 q'.则

$$\lambda_1 a_{1i} + \cdots + \lambda_n a_{ni} = q'\lambda_i, \qquad 1\leqslant i\leqslant n. \tag{4}$$

即得

$$q\min(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)\leqslant q'\lambda_i\leqslant q\max(\lambda_1,\cdots,\lambda_n),\quad 1\leqslant i\leqslant n.$$

分别取 $\lambda_i=\min(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)$ 与 $\max(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)$，即得 $q=q'$. 代入(4)得

$$\lambda_1 a_{1i}+\cdots+\lambda_n a_{ni}=(a_{1i}+\cdots+a_{ni})\lambda_i,\quad 1\leqslant i\leqslant n.$$

如果经过重排有 $\lambda_1\leqslant\cdots\leqslant\lambda_s<\lambda_{s+1}=\cdots=\lambda_n$，则以 $i=1,\cdots,s$ 代入上式即可知

$$a_{ji}=0,\quad 1\leqslant i\leqslant s,\quad s+1\leqslant j\leqslant n.$$

这与 A 是不可分拆的假定相矛盾. 所以标准型唯一. 定理证完.

附记:由定理的证明可见在相似关系中,只用到对角方阵.

§8.4 特征矢量

定理 8.2 假定 A 是不可分拆的非负方阵. 则存在一个正特征矢量以其高标 q 为其对应的特征根. A 的其他特征根的绝对值都不超过 q.

证 不妨假定 A 为标准型. 则 $\vec{e}=(1,\cdots,1)$ 即为 A 的正特征矢量:

$$\vec{e}A=q\vec{e}.$$

假定 q' 为另一特征根,其对应的特征矢量为 $\vec{x}=(x_1,\cdots,x_n)$. 于是

$$\sum_{i=1}^{n}a_{ij}x_i=q'x_j.$$

则

$$|q'||x_j|\leqslant\sum_{i=1}^{n}a_{ij}|x_i|\leqslant q\max_i|x_i|.$$

取 $|x_j|=\max\limits_i|x_i|$，即得定理.

定理 8.3 一个不可分拆的非负方阵 A,若不计常数因子,必有且仅有一个非负行(或列)特征矢量,且它是正矢量. 反之,若一个非负方阵 A 仅有一个非负行(或列)特征矢量,且为正矢量,则

A 是不可分拆的.

证 首先注意在标准型的定义中,我们可以用行积来代替列和.则由定理 8.2 可知若 A 为标准型,则$\vec{e}^T$ 为A 的列特征矢量,其特征根为 q.

其次,若$\vec{x}^T$ 是A 的列特征矢量,其对应的特征根为 β;$\vec{y}$是 A 的行特征矢量,其对应的特征根为 γ.若 $\beta \neq \gamma$,则必$\vec{y}\vec{x}^T=0$.事实上,由

$$A\vec{x}^T = \beta\vec{x}^T \text{ 与 } \vec{y}A = \gamma\vec{y}$$

即得

$$\gamma\vec{y}\,\vec{x}^T = \vec{y}A\vec{x}^T = \beta\vec{y}\,\vec{x}^T,$$
$$(\gamma - \beta)\vec{y}\,\vec{x}^T = 0.$$

所以

$$y\vec{x}^T = 0.$$

任何不可分拆的非负方阵 A,一定有一个正特征列矢量$\vec{u}^T$,其特征根为 q.若$\vec{v}$为 A 的行特征矢量,其特征根不等于 q,则$\vec{v}\,\vec{u}^T=0$.由于$\vec{u}>0$,所以$\vec{v}(\neq\vec{o})$不可能是非负的.

A 的任何非负特征矢量一定是正矢量.否则若有零支量,则可推出 A 是可分拆的了.又若 A 有两个正特征矢量$\vec{v}_1,\vec{v}_2$,其特征根都是 q,则

$$(\vec{v}_1 - \lambda\vec{v}_2)A = q(\vec{v}_1 - \lambda\vec{v}_2).$$

取 λ 使$\vec{v}_1-\lambda\vec{v}_2\geqslant 0$ 且有零支量.这与 A 不可分拆相矛盾,所以正特征矢量的唯一性得证,反之,若 A 可分拆,则一定有一个有零支量的非负特征矢量.定理证完.

定理 8.4 命 $C=(c_{ij})$为一个复元素方阵.若$|c_{ij}|\leqslant a_{ij}$,其中 $A=(a_{ij})$为一个高标为 q 的不可分拆方阵,则 C 的任一特征根 r 的绝对值均不超过q.又若 C 有一个特征根$r=qe^{i\theta}$,则

$$C = e^{i\theta}[e^{-i\theta_1},\cdots,e^{-i\theta_n}]A[e^{i\theta_1},\cdots,e^{i\theta_n}].$$

证 不妨假定 A 为标准型.命$(x_1,\cdots,x_n)$是 r 对应的特征矢量.则

$$rx_j = \sum_{i=1}^{n} x_i c_{ij}.$$

由假设可知

$$|r||x_j| \leqslant \sum_{i=1}^{n} |x_i||c_{ij}| \leqslant \sum_{i=1}^{n} |x_i| a_{ij} \leqslant \max_i |x_i| q. \tag{5}$$

取$|x_j| = \max_i |x_i|$，即得$|r| \leqslant q$.

其次，若 $r = qe^{i\theta}$，我们不妨假定

$$|x_1| = \cdots = |x_s| > |x_{s+1}| \geqslant \cdots \geqslant |x_n|.$$

当 $1 \leqslant j \leqslant s$ 时，由(5)可知 $a_{ij} = 0, s+1 \leqslant i \leqslant n$，即 A 是可分拆的，矛盾，所以必须

$$|x_1| = \cdots = |x_n|.$$

不妨假定$|x_j| = 1$，命 $x_j = e^{i\theta_j}$. 则得

$$(e^{i\theta_1}, \cdots, e^{i\theta_n})C = qe^{i\theta}(e^{i\theta_1}, \cdots, e^{i\theta_n}),$$

即

$$\sum_{k=1}^{n} e^{i\theta_k} c_{kj} = qe^{i(\theta+\theta_j)}.$$

又由(5)的两端可知$|c_{kj}| = a_{kj}$. 由于 A 是标准型，所以

$$\sum_{k=1}^{n} |c_{kj}| = \sum_{k=1}^{n} a_{kj} = q = e^{-i\theta} \sum_{k=1}^{n} e^{-i(\theta_j - \theta_k)} c_{kj},$$

即

$$a_{kj} = e^{-i(\theta_j - \theta_k)} c_{kj} e^{-i\theta}.$$

定理证完.

定理 8.5 假定 A 是不可分拆的非负方阵. 若 A 有一个以上的特征根的绝对值等于其高标 q，则这些特征根就是

$$qe^{2\pi il/k}, \quad l = 0, 1, \cdots, k-1,$$

其中 $k \geqslant 2$.

证 假定 A 有一个特征根 $qe^{i\theta}$. 则由定理 4 可知

$$A = e^{i\theta}[e^{-i\theta_1}, \cdots, e^{-i\theta_n}]A[e^{i\theta_1}, \cdots, e^{i\theta_n}].$$

其特征方程是

$$f(\lambda) = |A - \lambda I| = |e^{i\theta}A - \lambda I| = 0,$$

即如果 λ 是一个特征根，则 $\lambda e^{i\theta}, \lambda e^{2i\theta}, \cdots$ 都是特征根．由于 $f(\lambda)=0$ 的根数有限，所以有一个最小的 k 使 $k\theta$ 为 2π 的倍数，其中 $k \geqslant 2$．定理证完．

定理 8.6 命 A 为一个不可分拆的非负方阵．则其高标不是 A 的特征方程的重根．

证 A 的特征多项式 $f(\lambda)=|A-\lambda I|$ 的微商等于

$$f'(\lambda) = \begin{vmatrix} 1, & 0, & \cdots, & 0 \\ -a_{21}, & \lambda - a_{22}, & \cdots, & -a_{2n} \\ & \cdots & & \\ -a_{n1}, & -a_{n2}, & \cdots, & \lambda - a_{nn} \end{vmatrix} + \cdots,$$

其中第一个行列式是主子阵

$$A_1 = (a_{ij}), \qquad 2 \leqslant i, j \leqslant n$$

的特征多项式．由于 A 不可分拆，所以 A_1 的高标小于 q．即当 $\lambda \geqslant q$ 时，其数为正．其他各项亦然，所以当 $\lambda \geqslant q$ 时有 $f'(\lambda) > 0$．这说明 q 是 $f(\lambda)=0$ 的单根．定理证完．

§8.5 强不可分拆方阵

若一方阵 A 的任意幂都不可分拆，则称 A 为强不可分拆的．

如果 A 是强不可分拆的非负方阵，则 A 的绝对值等于 q 的特征根只有 q 一个，否则由定理 8.5 即可知 A^k 有重根．又由定理 8.6 可知 A^k 是可分拆的，这与 A 是强不可分拆的假定相违背．

定理 8.7 假定 A 是高标为 q 的强不可分拆非负方阵，则

$$\lim_{l \to \infty} \left(\frac{A}{q} \right)^l = \vec{u}^{\mathrm{T}} \vec{v}, \qquad \vec{v}\, \vec{u}^{\mathrm{T}} = 1,$$

此处 $\vec{u}^T$ 与 $\vec{v}$ 分别为 A 的正列与正行特征矢量．

证 由于除 q 以外，A 的特征根的绝对值均小于 q，所以

$$\lim_{l \to \infty} \left(\frac{A}{q} \right)^l = A_0,$$

其中 A_0 只有一个特征根为 1,其他都是零,因此 A_0 可以表示为

$$A_0 = \vec{u}^T \vec{v}, \qquad \vec{v}\ \vec{u}^T = 1.$$

命 $\vec{c}$ 为 A 的任一非零特征矢量.定义

$$\vec{v}_l = \vec{c}\left(\frac{A}{q}\right)^l.$$

则

$$\lim_{l\to\infty} \vec{v}_l = \vec{c}\ \vec{u}^T \vec{v} = (\vec{c}\ \vec{u}^T)\ \vec{v}$$

是 $\vec{v}$ 的常数倍.因此

$$q\vec{v}_{l+1} = q\vec{c}\left(\frac{A}{q}\right)^{l+1} = \vec{c}\left(\frac{A}{q}\right)^l A = \vec{v}_l A.$$

命 $l\to\infty$,即可知 $\vec{v}$ 是 A 对于 q 的正特征行矢量.同样可证 $\vec{u}^T$ 是 A 的正特征列矢量.定理证完.

由定理的证明可见,若 A 是强不可分拆的非负方阵,则存在 l 使 $A^l>0$.反之,若 $A^l>0$,则显然 A 是强不可分拆的.

定理 8.8 假定 A 是强不可分拆的非负方阵,且可逆.若 $\vec{x}$ 非 A 的正特征行矢量,则一定存在正整数 l_0,当 $l\geqslant l_0$ 时

$$\vec{x}\,A^{-l} = \vec{x}^{(l)}$$

为有不同号支量的矢量.

证 由定理 8.7 可知

$$\lim_{l\to\infty}\left(\frac{A}{q}\right)^l = \vec{u}^T\vec{v}, \quad \vec{v}\ \vec{u}^T = 1$$

及

$$A\,\vec{u}^T = q\,\vec{u}^T, \qquad \vec{v}\,A = q\,\vec{v}, \qquad \vec{u}>0, \vec{v}>0.$$

不妨假定 $\vec{u}$ 与 $\vec{v}$ 的支量之和均为 1.这样 $\vec{u}$ 与 $\vec{v}$ 就唯一确定了.我们不妨假定 $q=1$,否则以 q 除 a_{ij} 代替 a_{ij} 即可.还可假定 $\vec{x}\,\vec{u}^T=1$.所以

$$\vec{x}^{(l)}\,\vec{u}^T = \vec{x}\,A^{-l}\vec{u}^T = \vec{x}\,\vec{u}^T = 1.$$

现在假定对所有 l 都有

$$\vec{x}^{(l)} \geqslant 0.$$

则由 $\vec{x}^{(l)}\vec{u}^T=1$ 可知 $\vec{x}^{(l)}$ 构成一个有界闭集.$\vec{x}^{(l)}(l=1,2,\cdots)$ 至

少有一个极限点.不妨假定

$$\lim_{l\to\infty}\vec{x}^{(l)}=\vec{x}^*.$$

由$\vec{x}^*\vec{u}^T=1$可得

$$\vec{x}=\lim_{l\to\infty}\vec{x}A^{-l}A^l=\vec{x}^*\lim_{l\to\infty}A^l=x^*\ \vec{u}^T\vec{v}=\vec{v},$$

即$\vec{x}$是 A 的正特征矢量,定理证完.

§8.6　产综与消耗系数方阵

社会的经济结构是很复杂的.社会的总生产可分为两大部类:第一部类是生产资料的生产,第二部类是消费资料的生产.为简单计,我们暂时先研究第一部类.假定将组成社会生产的 n 种重要产品加以综合研究.我们不妨将这 n 种产品编号为 $1,2,\cdots,n$,其中第 i 种产品的计量单位以 p_i 表示,例如钢的单位为吨,电的单位为千瓦小时,如果第 i 种产品的数量为 x_i,则产品的整体可以用矢量

$$\vec{x}=(x_1,\cdots,x_n)$$

表示.这一矢量称为产综.注意:在此并没有用统一的度量,即用货币来作为所有产品的共同度量.

假定时间有一个单位,例如“年”.若开始生产时的产综为

$$\vec{x}^{(0)}=(x_1^{(0)},\cdots,x_n^{(0)}),$$

命$\vec{x}^{(j)}=(x_1^{(j)},\cdots,x_n^{(j)})$表示第 j 年的产综,则整个生产发展的变化就是产综的变化:

$$\vec{x}^{(0)}\longrightarrow\vec{x}^{(1)}\longrightarrow\cdots\longrightarrow\vec{x}^{(j)}\longrightarrow\cdots.$$

所以研究生产发展的规律就是研究产综的变化.

假定第一年度将第 j 类产品分配给第 i 类产品用于再生产或其他目的数量为 $x_{ij}^{(0)}$,则

$$x_j^{(0)}=\sum_{i=1}^{n}x_{ij}^{(0)}.\qquad 1\leqslant j\leqslant n.$$

命

$$\vec{x}^{(0)}(i)=(x_{i1}^{(0)},\cdots,x_{in}^{(0)}),\qquad 1\leqslant i\leqslant n.$$

这是分配给第 i 类产品的产综.所以

$$\vec{x}^{(0)}=\sum_{i=1}^{n}\vec{x}^{(0)}(i)$$

就是开始生产时的产综.一年后的产综是$\vec{x}^{(1)}=(x_1^{(1)},\cdots,x_n^{(1)})$,命

$$a_{ij}^{(0)}=x_{ij}^{(0)}/x_i^{(1)}.$$

这表示生产 p_i 单位第 i 类产品要消耗 j 类产品量,其计量单位为 p_j/p_i.所以

$$x_j^{(0)}=\sum_{i=1}^{n}a_{ij}^{(0)}x_i^{(1)},\quad 1\leqslant j\leqslant n.$$

将这个式写成矩阵形式

$$\vec{x}^{(0)}=\vec{x}^{(1)}A \tag{6}$$

或

$$\vec{x}^{(1)}=\vec{x}^{(0)}A^{-1},$$

此处

$$A=(a_{ij}^{(0)}),\qquad 1\leqslant i,j\leqslant n.$$

A 称为第一年度的消耗系数矩阵.

显然可以假定 A 是不可分拆的非负方阵,否则若 A 相似于

$$\begin{pmatrix}A_1^{(k)} & A_2\\ 0 & A_3\end{pmatrix},\qquad 1\leqslant k<n.$$

则我们考虑的经济系统中,第 $k+1,\cdots,n$ 类产品的生产与第 $1,\cdots,k$ 类产品无关.这种情况可分成小系统分别研究.所以我们可以假定 A 不可分拆.

§8.7 第二部类产品的数学模型

第二部类生产是指消费资料的生产.在数学模型中,可以把行政开支,国防费用,教育文化,进出口贸易等也包括在内来处理.

以$\vec{\xi}^{(l)} = (\xi_1^{(l)}, \cdots, \zeta_n^{(l)})$代表第$l$年政府开支，教育文化，投资折旧等的总和产综.则用下面的模型来表示：

$$\vec{x}^{(l)} - \vec{\xi}^{(l)} = \vec{x}^{(l+1)}A. \tag{7}$$

左边表示l年的产综$\vec{x}^{(l)}$减去支出产综$\vec{\xi}^{(l)}$，即l年实际可以投入生产的产综.

$\vec{\xi}^{(l)}$是由政府决定的.假定$\vec{\beta}^{(0)}$是一个初始矢量，可以暂时不确定.由递推公式

$$\vec{\xi}^{(l)} = \vec{\beta}^{(l+1)}A - \vec{\beta}^{(l)}, \qquad l = 0,1,2,\cdots$$

来确定$\vec{\beta}^{(l)}$.代入(7)即得

$$\vec{x}^{(l)} + \vec{\beta}^{(l)} = (\vec{x}^{(l+1)} + \vec{\beta}^{(l+1)})A.$$

这就与模型(6)相一致了.所以考虑模型(6)并未失去一般性.

由(6)可知

$$\vec{x}^{(1)} - \vec{x}^{(0)} = \vec{x}^{(1)}(I - A)$$

或

$$\vec{x}^{(1)} = (\vec{x}^{(1)} - \vec{x}^{(0)})(I - A)^{-1}.$$

这就是著名的 W. Leontief 模型.

§8.8 正特征矢量法

命q为A的最大正特征根.则由定理 8.3 可知对应于q有唯一的正行特征矢量$\vec{u}$：

$$\vec{u}A = q\vec{u}.$$

由(6)出发，如果初始产综$\vec{x}^{(0)}$取作$\vec{u}$(或其某一倍数)，则得

$$\vec{x}^{(0)} = \vec{x}^{(1)}A = q\vec{x}^{(1)}.$$

注意：$\vec{x}^{(1)}$应为$\vec{x}^{(0)}$之倍数.所以

$$\vec{x}^{(1)} = q^{-1}\vec{x}^{(0)}.$$

用归纳法可以证明

$$\vec{x}^{(l)} = q^{-l}\vec{x}^{(0)}, \qquad l = 1,2,\cdots.$$

这就是说，如果投入生产的产综各分量之比与消耗系数方阵A的正特征矢量$\vec{u}$的各分量之比一样，则各部门的产量将按$1/q$的倍

数增长，这是最高的增长速度. 如果考虑到第二部类生产. 则由(7)可知，应选取$\vec{\xi}^{(l)}$使$\vec{x}^{(l+1)}$尽可能与正特征矢量成比例.

如果初始产综$\vec{x}^{(0)}$与正特征矢量$\vec{u}$不成比例，则由定理 8.8 可知经过一段时间，例如 l 年，$\vec{x}^{(l)}$就有负支量，这是不允许的，也就是说出现了危机，需要对投入比进行调整.

例 假定 $n=2$ 及消耗系数方阵为

$$A = \frac{1}{100}\begin{pmatrix} 25 & 14 \\ 40 & 12 \end{pmatrix},$$

则 A 的正特征矢量为

$$\vec{u} = \left(\frac{5}{7}(\sqrt{2409}+13),20\right) = (44.34397483\cdots,20).$$

取两个生产部门，其编号用 1,2 表示. 如果取初始产综$\vec{x}^{(0)}=(45,20)$，则得下表：

表 1

部门编号 / 时间	1	2	生产增长倍数	
			1	2
原来	45	20	—	—
第一年	100	50	2.2	2.5
第二年	300.7	57.7	3.08	1.15
第三年	−532.5	1102.1	出现负值，生产无法继续	

其中$\vec{x}^{(3)}=(-532.5,1102.1)$中出现负值，表示生产部门 1 的原料已经消耗完，无法进行再生产了，所以最晚在第二年就应该对投入进行调整. 同样如果取$\vec{u}$的三位小数近似作为$\vec{x}^{(0)}$，即

$$\vec{x}^{(0)} = (44.344,20),$$

则第 8 年的产综$\vec{x}^{(8)}=(8.9821,-23.501)$中有负值. 如果取$\vec{u}$的八倍小数近似作为$\vec{x}^{(0)}$，即

$$\vec{x}^{(0)} = (44.34397483,20),$$

则第 13 年的产综$\vec{x}^{(13)}=(12,371,364.61,-6,472,534.43)$中有

负值.

从理论上讲,正特征矢量只是一维欧氏空间第一象限中的一条射线 t,其测度为零,而产综稍稍偏离 t 就会产生不平衡,所以平衡是暂短的,而不平衡则是经常的.因此需要不断进行调整,使产综尽量靠近 t.

§8.9 线性规划的应用

在模型(6)与(7)中都没有考虑到生产能力的限制问题,即 $\vec{x}^{(1)}=\vec{x}^{(0)}A^{-1}$的一些分量超过了现有生产能力上限的问题.这个问题可以用线性规划方法来加以解决.

假定$\vec{\eta}=(\eta_1,\cdots,\eta_n)$表示生产能力的上限,即下一年度中最多能生产 i 类产品 η_i 个 p_i 单位.则本年度应投入多少产品呢?也就是要求矢量$\vec{x}$使

$$\vec{x}^{(1)}=\vec{x}A^{-1}\leqslant\vec{\eta},$$

其中$\vec{x}$当然还要满足约束条件

$$0\leqslant\vec{x}\leqslant\vec{x}^{(0)}.$$

假定第 i 类产品 p_i 单位的价值或利润是 q_i 及$\vec{q}=(q_1,\cdots,q_n)$,此处我们可以用统一的货币单位,例如人民币.于是得到线性规划模型

$$\begin{cases}\max\vec{x}A^{-1}q',\\0\leqslant\vec{x}\leqslant\vec{x}^{(0)},\\0\leqslant\vec{x}A^{-1}\leqslant\vec{\eta},\end{cases}$$

即在约束条件 $0\leqslant\vec{x}\leqslant\vec{x}^{(0)}$,$0\leqslant\vec{x}A^{-1}\leqslant\vec{\eta}$之下,求$\vec{x}$使目标函数$\vec{x}A^{-1}q'$,即总利润或产值达到最优.以这一$\vec{x}$作为投入产综最好.

这一问题可以用单纯形方法来求解.

§8.10 计算

假定 $A>0$ 及 A 的高标$q<1$.

1) Leontief 逆矩阵$(I-A)^{-1}$的计算. 命

$$\mathcal{O}_m = \sum_{v=0}^{m-1} A^v, \qquad m = 1,2,\cdots.$$

则

$$\lim_{m\to\infty} \mathcal{O}_m = (I - A)^{-1}.$$

这一方法的收敛速度很慢,建议先逐次算出

$$A^2,(A^2)^2 = A^4,\cdots,A^{2^{k-1}},\cdots, \tag{8}$$

再用递推公式

$$\mathcal{O}_{2^k} = \mathcal{O}_{2^{k-1}} + A^{2^{k-1}}\mathcal{O}_{2^{k-1}}, \qquad k = 1,2,\cdots.$$

即可得出 $\mathcal{O}_{2^k}$. 用上面两个方法算出 $\mathcal{O}_{2^k}$ 所需的矩阵乘法次数分别为

$$O(2^k) \quad 与 \quad O(k).$$

2) 高标的计算. 由于 A 是强不可分拆方阵,所以 A 的绝对值等于 q 的特征根只有 q 一个. 特征根满足的方程为$|\lambda I - A| = 0$. 由根与系数的关系可知 A 的特征根之和等于 A 的迹:

$$S(A) = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}.$$

应用下面的事实:若 $0 \leqslant |a_k| < a\ (2 \leqslant k \leqslant n)$,则

$$\lim_{m\to\infty}\left(a^m + \sum_{k=2}^{n} a_k^m\right)^{\frac{1}{m}} = a. \tag{9}$$

这一事实可以证明如下:显然

$$a^m + \sum_{k=2}^{n} |a_k^m| \leqslant na^m,$$

及当 m 充分大时

$$a^m - \sum_{k=2}^{n} |a_k^m| = a^m\left(1 - \left(\frac{a_2}{a}\right)^m - \cdots - \left(\frac{a_n}{a}\right)^m\right) > \frac{a^m}{2},$$

所以

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{m}} a \leqslant \left(a^m - \sum_{k=2}^{m} |a_k^m|\right)^{\frac{1}{m}}$$

$$\leqslant \left(a^m + \sum_{k=2}^{n} |a_k^m|\right)^{\frac{1}{m}} \leqslant n^{\frac{1}{m}} a.$$

命 $m\to\infty$易得(9).

由于 A^m 的诸特征根分别为A 的诸特征根的 m 次方幂,所以由(9)可知

$$q=\lim_{m\to\infty}S(A^m)^{\frac{1}{m}}.$$

算法如下:先算出系列(8),再算出

$$S(A^{2^k})^{\frac{1}{2^k}}.$$

这就是 q 的近似值.因此这一算法所需的矩阵乘法运算次数仍为 $O(k)$.

参 考 文 献

[1] 华罗庚与王元,有限与无穷,离散与连续,科学通报,12,1963,4~21.

[2] 华罗庚,高等数学引论(余篇),科学出版社,1984.

[3] 华罗庚,计划经济大范围最优化的数学理论,(Ⅰ)—(Ⅹ),科学通报,12,13,16,18,21,1984;1,9,1985.

[4] 华罗庚(Loo-Keng Hua), On the mathematical theory of globally Optimal planned economic systems, Proc. Nat. Acad. Sci; USA, V81,20,1984.

[5] 华罗庚,计划经济大范围最优化数学理论,中国财政经济出版社,1987.

注记(王元):华罗庚的这一工作完成于 1957—1958 年,于 1963 年,首先将这项工作的摘要发表于华罗庚与王元合作的一篇文章中([1]),不幸在文化大革命中,他的手稿被查抄遗失了.从 1982 年开始,他经过逐步回忆,重新写出一些手稿,并陆续发表了一些注记([3],[4]).然后,我根据他的手稿又重写了一遍.最初拟发表于我们合写的书"Popularizing Mathematical Methods in the People's Republic of China——Some Personal Experiences, Birkhauser, Boston, 1987"中,作为第十二章.华罗庚觉得还应再做些工作及更完善之后再发表,但不幸他于 1985 年去世,现在将经我整理后的他的工作发表于此.

第九章　应用数学之观点与方法论

§9.1　分类观点与评价标准

何谓应用数学？回答这个问题，首先要先回答什么是数学？众所周知，时至今日，“什么是数学？”连许多大数学家也说法不一．历史上的大数学家，从牛顿算起，高斯、…、希尔伯特…直至当今著名的数学家，他们或创立了数学的基础理论，给出了数学的许多新思想、新概念、新方法和新技巧，或发现了数学的许多重要定理，或提出了数学的许多猜想．数学家们一代接一代地辛勤劳动，在构筑的数学大厦上添砖加瓦．每过去一个世纪这个大厦都添加上一层建筑．尽管后代对其中的精美赞叹不已，但当问及他们在干什么时，他们也未必能说得很明白．比如，小平邦彦在晚年写了不少数学杂谈，有的标题就用“数学之难以想象”．W. F. Atiyah 也说，很难给数学或它搞的内容下定义．当然，大多数人还是赞同恩格斯的提法，认为“数学是研究现实世界中的数量关系和空间形式”．但是，人们觉得这个说法太笼统了些．所以不少学者还在继续深究“数学是什么？”有的甚至担心一代一代构筑的数学大厦会不会坍塌．时间在流逝，历史发展至今，人们对数学本质的看法，主要有三大流派——逻辑主义、直觉主义、形式主义．逻辑主义认为，数学真理是与逻辑真理密切相关的；直觉主义认为，数学是人类通过智力构造所进行的思维活动；形式主义认为，数学是一种按某种规则进行的符号运算所得的结果．它们都体现了关于数学本质的部分真理，但又都未能全面地反映数学这一事物．这说明人类对数学本质的认识还要逐步深化，这个过程一直还在继续着．

“应用数学是什么？”自然直接受“数学是什么？”的看法（观点）的影响．然而应用数学又有其特殊性，不同的应用数学观就会有不

同的应用数学发展的道路和方向.这跟纯粹数学是有区别的,在纯粹数学阵营里,"潮流"就是导向,数学家往往会不知不觉地被卷入数学社会的大潮中,身不由己地"追星"起来.应用数学的工作者,似乎都可以依靠个人选择的道路与方向,走比较实际和简明的道路.当然,这种选择完全由自己的应用数学观所决定.数学界长期以来认为,应用数学就是数学的应用.最初的数学的应用很清楚,比如,牛顿的数学应用于物理力学;后来 Poincaré 的数学应用于天体力学,另一个例子就是 Riemann 几何为 Einstein 的广义相对论提供了基本框架.这些都是大的应用,小的应用举不胜举.华罗庚本人对应用数学的认识也始于数学的应用,后来他通过自己的实践和他的数学洞察力以及国内外应用数学的发展,他清楚地认识到,把应用数学只看成是数学的应用,或把应用数学看成与纯粹数学没有两样,都没有全面地反映应用数学这一事物.但是,如果也像"什么是数学?"那个问题一样去讨论"什么是应用数学?"那么,有志于应用数学的数学工作者就不知道自己该做什么,和怎么做.因此,华罗庚提出了应用数学的分类观点.这种分类观点不但避免了关于什么是应用数学的无休止争论和一些偏激作法,而且对于每个在应用数学领域里耕耘的工作者,更能明确自己的方向和位置.同时由于在不同位置上的工作,有不同的评价标准,这也避免了评价上的不公正待遇.至少数学工作者自己心中有杆秤,不管他人怎么看,自己的份量自己心中有数,多少有点自明自慰,有利于调动搞应用数学的人的积极性和各类型应用数学队伍的形成.这需要一个过程,真正的科学工作者不在乎这个过程.

华罗庚把应用数学大致分成三类.一类是应用数学的基础理论研究,这类研究与纯粹数学研究在思想与技巧上没有本质差别.差别在于问题的来源不同,纯粹数学问题多数来源于数学内部,而应用数学问题多数来源于数学的外部;在研究的动力(目的)和美学观点上也有些差异.另一类应用数学研究是数学与别的学科领域的交叉,相互渗透,互相促进,以揭示该学科中重要的数学结构和解决有关问题为目的.第三类应用数学研究是面向国民经济系

统、军事系统和社会发展系统，以解决这三大系统中提出的现实问题为目标.他认为在中国这三类研究都很重要，都有很好的前景.在当今之中国，这三类研究力量最弱的是第三类，而我国国家发展急需大量的这类研究.因此，他主张大力发展第三类研究，以形成中国应用数学的特色.

华罗庚确定他领导的中国应用数学的主攻方向是如上所述的第三类研究.因为第一、二类的研究与纯粹数学研究在思想和方法上比较相近，在华罗庚倡导应用数学之后，已经有一批原来在纯粹数学领域工作的数学工作者转到这上头来了，一般说来他们都有不错的成绩.第三类研究具有特殊的难度.首先它的“问题”来自数学的外部，是从经济、军事和社会发展三大系统中提出来的“问题”，这种“问题”出现在你面前时还仅仅是一种自然语言的描述，还远不是一个数学问题，把它变成数学问题，需要经过提炼；难度就出在这种对“问题”的数学提炼与加工上.数学修养不同的人，对同一个“问题”的提炼与加工的结果不同.即使两者都是“高手”，由于他们可能站在不同角度观察同一个“问题”，其结果也不一样.这种把实际“问题”提炼加工成数学问题，通常称之为数学建模.这种建模的成功还依赖于能否找到恰如其分的数学概念与表达形式，以及随后能否找出合适的分析与求解的有效技巧.这种抽象过程中，简单性(simplicity)与美(elegance)获得了绝对的重要性.还应当着重指出，不是所有的实际问题，都可以用现有已知的数学语言去描述它.原则上讲，数学的一个重要特征是它的普遍性.有的数学家说，一切“问题”都是数学问题；也有的数学家说，人类所有知识的每一分支几乎都可用数学来分析.但是，把一个活生生的现实“问题”要变成一个数学问题，做起来是不容易的.

不论是纯粹数学还是应用数学，问题的提出和解决，都促进了它们的发展.纯粹数学家和应用数学家都是面对“问题”工作，只不过纯粹数学家是面对真正的数学问题，比如哥德巴赫猜想、费尔马猜想；而应用数学家面对的是实际问题，一个还没有转化为数学问题的真实的问题.

严重的现象是，在数学社会里存在着一种偏见，人们看重真正的纯粹数学问题，而轻视从实际问题中提炼出来的数学问题；更严重的是认为纯粹数学面对的问题需要高智慧的劳动，而应用数学面对实际问题的研究则不需要. 华罗庚反对这种看法，而且用自己的实践证明，面向实际问题的应用数学研究需要很高的智慧能力，同样显示出很高的创造精神. 当然由于问题的本质不同，必须对不同质的创造物有不同的评价标准.

另一种偏见是对解决问题的过程持不公正的态度. 纯粹数学中的一些问题的解决过程可以历时 100 年、200 年、300 年，甚至更长. 人们已经取得共识，一个问题虽然历时一个世纪、二个世纪未彻底解决，但它的每一步进展都受到赞誉. 比如费尔马猜想，历时 300 多年，人们在奋力解决这个问题的过程中，引进了许多新的技巧与新的概念. 这些新技巧、新概念正是纯粹数学创新的重要形式，它们已渗透到大部分数学之中. 应用数学中的问题（本书中的应用数学主要是指华罗庚的第三类应用数学）则不允许有这样的时间量度. 倘若你不能在短期内解决你面对的实际问题，人家就会有非议，既使你有阶段性的进展，除了"高手"会赞誉你外，一般人反而会奚落你. 这种习惯势力，对应用数学的发展是极不利的. 当然，应用数学面对这样的实际问题，本身有时效要求，你若不能在短期内解决它，它已变成了另一个问题. 如果再从效益上去评判你的工作，问题解决不好就已造成了效益上的损失. 这是纯粹数学问题所不存在的，这也是纯粹数学研究与应用数学研究的重要区别之一.

华罗庚在中国倡导、尝试、试点、普及应用数学的年代，中国的政治、经济和学术环境都不利于应用数学工作的开展. 这是本书所指的第三类应用数学具有特殊难度的又一个原因. 在这种环境中，一般数学家既使被迫下厂下乡，想让数学方法为人民服务，或想面向实际问题，提取出数学问题，而后解决这个实际问题，那是非常困难的事情. 华罗庚选择的主攻方向，是明知山有虎，偏向虎山行. 首先他看到这个主攻方向在应用数学中的重要地位，其次他认为

假若他不去闯这条路，别人就更难了．他认为他有他的优势，因此责无旁贷，毅然在纯粹数学在中国已完成开创性工作后，决心探索应用数学的新路子．这条新路的开拓是如此之难，凭着他的高深学术造诣，凭着他从40年代开始的构思、倡导、尝试和1958年开展群众性普及线性规划等的经验，他完全清楚这条路要先普及后提高，而且多年一直在选择普及技术，在选好普及技术之后（完全选对了），在第一次试点时，半年时间的努力，基本上失败了．这件事如果发生在别人身上，可能的结果是偃旗息鼓而退，再也不敢试了．可是华罗庚，不，他总结经验教训继续试点．由于他的普及数学方法的努力，1975年以后，中国的应用数学事业有了新的转机，有了一个开展工作比较好的基础．历史应该记下这一笔，因为年轻数学工作者是不知道这个过程的．

应用数学研究成果的表现形式，按照华罗庚的分类观点来说：第一类是应用数学的基础理论研究，它的评价标准与纯粹数学基本上一样；第二类应用数学研究的成果评价，要结合交叉学科的评价标准；第三类应用数学研究成果的主要表现形式是研究报告，研究报告的核心是数学思想与技巧．评价这些成果大致从以下几个方面：

(1) 问题的现实重要性；

(2) 问题的难度与复杂度；

(3) 成果产生的效益（经济的、社会的）及对科技进步的推动作用；

(4) 一个解决问题好的成果也还具有：构思巧，思想妙，方法实用、有效，文体清楚，方法技巧简单和易于普及推广，等等．

在应用数学中，数学思想与技巧主要指的是把实际问题变为数学问题的建模及其对模型求解的算法思想与技巧．大多数数学家都认为一种数学模型与算法是创造物，是一种艺术品，而纯粹数学研究的成果主要表现形式的核心——定理，只是发现物．因此，华罗庚和许多数学家都认为应用数学研究难也就在于此．任何在应用数学中的概念、思想与技巧上的创新，应得到与纯粹数学研究

一样的高度评价.要克服在数学社会中存在的偏见(认为只有纯粹数学研究才需要高水平的智力劳动,而应用数学是低水准的,对数学家是无挑战性的),只有通过实践给予回答.华罗庚通过他在真实世界中的应用数学工作,展示了巨大的创造性和智慧力量.

§9.2 普及推广型与创造型

运筹学与应用数学有基础理论研究与应用研究之分,在应用研究中又有普及推广型与创造型之别,这是华罗庚的观点.

华罗庚把应用数学大致分成三类,其中第一类侧重于基础理论研究,而其它两类侧重于应用研究.这是一种大致的分类,不是绝对如此.既使是基础理论研究工作,也要关心应用前景以及普及推广的可能性;其它两类研究,也有基础理论研究的内容,而且华罗庚一再强调只有理论站得高,应用研究才能做得好.在这两类研究中,人们更容易想到研究成果的普及推广工作.对于一个好的便于普及的数学技术,在一定的时期内组织相当规模的队伍,去普及推广这种技术,于国于民是很有益的,这种应用研究是很有意义的.华罗庚在中国探索应用数学发展道路时,第一步就从普及好的数学技术做起,而且做得很有创造性.这为中国今后的数学普及工作,树立了光辉的榜样.华罗庚更强调应用研究中的创造型,在他看来,没有创造的应用研究就像生命没有灵魂.所以他的普及工作始终贯穿着创造精神.对于交叉型的应用研究和面向三大系统(或说面向实际问题)的应用研究,他更强调创造性.他认为没有创造思维的人是无法进行这类研究的.因为这类研究面对的只是活生生的实际问题,而不是数学问题,这与进行应用基础理论研究和普及推广工作不同,在进行应用基础理论研究时,面对的是数学问题,有一定的数学基础还能进行一定的思考;在进行普及推广工作时,手中已掌握一些数学技术,目的在于把它用好.因此,他认为面向实际问题以解决实际问题为目标的应用数学研究,需要高素质的应用数学人才.所谓高素质就是具有特殊的创造思维,很善于从

实际问题中创造性建模，并能给出有效的算法．在中国开展应用数学的创造型研究和培养能进行这种创造型研究的人才，这是他探索中国应用数学道路的核心问题．在中国，开展普及数学方法的道路的探索，应该说他成功了．但花费的时间和精力，似乎太大了．与他进行的纯粹数学研究相比，他并不满意．他说："我过去搞纯粹数学，每过四、五年就能对一门数学略有成就，现在搞数学应用与普及，搞了这么多年，还觉得未入门呢！"这当然还说明应用数学之难．

在这里我们想说一句题外话，华罗庚对搞应用数学是有很高标准的．他在许多场合，特别是文字表述的场合，都只提自己搞数学应用和数学普及推广工作，很少提自己在搞应用数学．直到1984年3月，他在上海教育出版社为他出版的《华罗庚科普著作选集》的首页——"感谢"中，还是这样提法："在我从事数学普及工作的30多年中，…"，"特别在我从事'优选法'与'统筹法'推广工作的近20年中，…"．这使我们更清楚地认识到，搞应用数学是不容易的．

华罗庚从事的普及推广型工作，"历时20年，走遍了我国20多个省、市或自治区，几百个城市，几千个工厂，给数以百万计的工人师傅、技术人员与厂矿领导讲过课"．这在古今中外是史无前例的．这种普及推广工作不但为国家为人民创造了大量财富并产生了重大的社会效益，而且更为重要的是为中国应用数学的发展，打开了大门，铺平了道路．光是破除人们对数学的神秘感的功劳，就是不可估量的．许多数学家都清楚地看到，要开展应用数学研究工作，首先必须破除人们对它的神秘感，尤其像在中国这样文化素质很低的国家中开展应用数学工作，更要先破除人们对数学的神秘感．华罗庚在中国普及数学方法的开创性工作在国际上引起了极大的反响．国外数学家评论说："他拥有威仪的相貌、迷人的个性和丰富的想象力"，"他用惊人的勤奋和炽烈的热情，教育他的人民运用数学"，"全世界没有一位数学家曾经像他这样做过"，"从来没有过一位数学家有他这么多听众"．他的数学普及教育思想冲破了中

国几千年传统的孔夫子思想，他普及数学方法，在学术上洞察之深、选材之妙、加工之巧、表达之深入浅出、行动上之魄力，足见其是世界上伟大数学家之一．他为中国普及推广应用数学方法花费了太多的精力．

华罗庚更重视他所认定的应用数学创造型研究．这是更难的一个层面．他想先普及后提高，创造型研究放在第二步进行，由于他在普及推广型（第一步）上花费太多时间与精力，第二步大力推行，在他有生之年是来不及了．但是由于他顽强的创造精神，还是为我们留下了一个范例．那就是数理经济方面的研究，他是面向中国当时实际的经济系统，对这个实际系统进行调查研究、系统分析，建立了相应的数学模型并利用数学工具给出了解决这个实际问题的最优策略．我们已经在第八章详细介绍了这个创造型的应用数学研究工作．我们说，华罗庚为我们留下了一个创造型应用数学研究的范例，是想提醒人们注意，虽然他研究的经济系统在我国已经成为过去，他提出的特征矢量法没有发挥太大的效益，不能像"优选法"和"统筹法"那样进行推广．但是对一个复杂的经济系统的分析技巧，解决问题的思路，为后人树立了范例．甚至他对那个经济系统最终的最优解的形式与内容都与国内外常见的最优解不同．这种创造性工作，正是他所提倡的，这是他的追求．

这个范例的另一个背景要在这里提及的，那就是它的产生过程，因为这个故事本身也很令人深思，给人以启迪．事实上，这个故事在许多文章和专著（如王元著的《华罗庚》和本书的前面）都提到过，简而言之，华罗庚是在60年代初就关注这个问题，稍后就有了结果，但在文革期间，所有手稿被"查抄"，散失殆尽，后来就没有下落了．他很痛心，其它手稿被窃，他就认了，唯独这经济方面的工作，他心放不下．这正是他对应用数学分类中的第三类的典型工作．他一直想重新回忆这方面研究．人所共知，要想回忆恢复一项过去的工作，在资料丢失殆尽的情形下，谈何容易．再说他普及推广工作量太大，耗掉了他大量的精力．直到他心脏病发作，病倒在医院，医生不让他工作的情况下．他把精力集中在两个问题的思考

上：一是中国应用数学路子怎么走，以当时来说就是普及工作怎么继续往下搞；二是重新考虑经济系统的最优化问题，把它重新写出来，经过艰苦地努力，他实现了．这真是拼了命抢回来的研究成果．1983年他把这个成果投到《科学通报》，后来在《科学通报》上全文发表了．

华罗庚对他在经济系统的最优化工作，看得很重，在《科学通报》上发表时，定名为"计划经济大范围最优化的数学理论"．他曾经对杨德庄说："一个人的工作有几项，比如讲有两三项，在历史上留下来就很了不起．一个人一辈子发表了几百篇论文、许多著作，真正能在历史上记一笔的就那么几项，其它就随风飘了"．他在谈自己工作时，在应用数学方面，就提到了两项：其一是分圆域方法，其二就是上面提到的经济系统的工作．分圆域方法是数论在近似分析上的应用，后来在交叉学科有广泛的应用，但方法论上说，仍属于纯粹数学的．这种创造性工作实质上是纯粹数学的创造性工作，不过它已属于应用数学的范畴．他认为经济系统方面他所进行的工作是应用数学的创造型工作．他说从60年代初开始，20多年来为中国应用数学做的工作，主要是建了一个"门"．"门"字的两竖杠是两根柱子：一边是"统筹法"，另一边是"优选法"；"门"的横梁是"特征矢量法"．可见他把经济系统优化工作看成是提高型的．在"计划经济大范围最优化的数学理论"的文章中，他明确指出，统筹法和优选法可以做为他经济系统优化理论的基本的基础性方法．

华罗庚还特别善于抓住别人工作的创造性要点，有的连做那个工作的本人都没注意到，经他一点，豁然开朗，认识就上了一个层次，有的就形成了新的思想．

下面仅举一个实例．

1969年底开始，中国科大被迫下迁合肥，1970年华罗庚到上海进行第三次试点，试点成功，然后逐步形成了普及推广小分队，在全国各地进行普及推广工作．70年以后，到合肥的人再无法出来参加这种普及推广工作，迁到合肥后，中国科大一度归当时的三机部（航空工业部）领导，中国科大的教育革命，师生下厂接受"再

教育”，只能在合肥或全国三机部工业系统的工厂中进行．当时也强调理论联系实际，赶着知识分子“臭老九”下厂．数学系下厂能干的事就是普及推广“优选法”和“统筹法”，同时也想探索一下数学的应用．龚升、杨德庄、陆洪文等一批教员到西安三机部几个大厂，如红旗公司、庆安公司、黄河公司，以及闫良的红安公司、耀县的试验基地，有的人后来还到贵州三线、南昌等地的三机部大厂．这种广泛的接触实际对应用数学工作者来说是很有好处的（至少在客观上是如此）．一个偶然的机会，他们接触到一个非常难的实际问题——电力变压器优化设计问题．当时是 1975 年初，实际工作者告诉他们，我国电力变压器设计还处于手工计算阶段；设计一台符合国家规定指标的变压器，需要集中全国最大的几个变压器厂的一批工程技术人员于某地，对变压器有关参数，不断地反复地进行调试计算，经过几个月最后才能找到一组参数值，满足各项国标要求．他们说能不能用电子计算机来代替手工计算，进而能不能再通过计算机计算不但找出了一组参数值，使变压器各项指标达到国标要求，而且使变压器造价（或 10 年变电成本）最低（也就是达到优化设计）．人们还告诉他们，从 1963 年开始，我国变压器研究所和最大的变压器厂——沈阳变压器厂，有一批高水平的工程技术人员在研究这个问题，但尚未成功．当时他们决定试一试．这是他们第一次面向一个实际问题，通过建模求解，达到解决这个实际问题的目的．也就是第一次碰到华罗庚应用数学分类观的第三类问题；过去他们也建过模型，那都是一些线性规划和农村数学方面的小模型．为了真实描述变压器各参数所决定的几何形状和各规定的指标，同时要考虑材料规格限制以及我国工厂生产的工艺水平．他们完成了建模工作，但模型非常复杂．变量既有连续型的，也有整数型的，中间计算过程的表达式中，函数套函数有的达到几十重关系．用一般的方法解这样大规模的混合型整数规划问题是不可能实现的．后来他们用了一个特殊的思想和技巧，在当时仅有的第一代电子管计算机上实现了求解算法．所得结果不但完全符合生产工艺要求而且是优化的，经鉴定认为，他们创造了一种设计变压

器的新方法,这个新算法在电子计算机上实现了,在当时是很难得的,达到了很高水平,填补了我国电力变压器设计上一个空白.当他们把这项目研究成果发表的文章送给华罗庚时,他非常高兴.1976年6月24日,他给杨德庄写信,对在变压器优化设计上所取的成果表示祝贺,信中说:“向你们热烈祝贺,科大数学系走上毛主席指引的光明大道了.”

华罗庚认为这是应用数学创造型研究一个很好的实例.他说这正是他第二步要开展的应用数学研究工作.他还说在当时如果大力提倡建模和利用电子计算机,那是不合适的,而且对应用数学在中国的开展,不是促进而是适得其反.中国当时还处在普及阶段,只有第一步普及搞好了,才有第二步的深入、提高.再说当时电子计算机还很少,还是稀罕物.但是他珍惜这种研究,鼓励人们继续探索,当他听完杨德庄口头报告后,他眼睛一亮马上指出,在当时进行这项研究有以下几个不容易:(1) 建立数学模型不容易;(2) 利用计算机不容易;(3) 用别的目标函数替代原来的目标函数的思想的提出不容易;(4)根据目标函数特性给出平面对分法的算法不容易.

由此可见,华罗庚对应用数学创造型研究是久思在心的,是特别敏感和关注的.得到华罗庚的肯定和夸奖,对应用数学工作者来说,是极大的鼓励,而且能站在更高的境界总结前面已进行的研究工作,把“珍珠”留了下来.以上所说电力变压器优化研究项目,由于原来的目标函数:造价或10年变电成本(求其最小)表达式异常复杂,给寻找优化方案造成了困难,为了克服这个困难,他们通过分析,找到了一个物理上等价的目标函数(它不是数学上一一对应的等价),用它来替代原来的目标函数.这种替代不影响原问题的本质,可是由于它的替代后形成的新问题,在算法研究上发生了质的变化.问题一下子变得容易求解了.华罗庚肯定了他们的这种替代思想,引起了他们自己深思,并在尔后的应用研究中,常用此法,不但用在变动目标函数上,而且也用在更动约束条件上,每一次都很成功.逐渐地他们领悟到了一种思想,这种思想对于解决面向实

际问题的应用数学研究是行之有效的，他们称这种技巧为更动目标法或更动约束法.这种技巧与华罗庚最提倡的模型算法一体化思想相配合，是应用数学创造型研究的有力武器.

数学家常说，数学既是科学又是艺术，真与美同样重要，这主要是对纯粹数学而言；对纯粹数学，人们常把它的成果与建筑学(它也是既是科学又是艺术)中的建筑物类比，既要功能好又要求造型美.对于应用数学来说，当然也可以这样类比，但似乎更确切的应该是与军事学(它也是科学与艺术的结合)中的战役类比.这里又得说明应用数学指的是面向实际问题，以解决实际问题为最终目标的那一类应用数学.人们可以从古今中外的战争案例中得到启发，几千年的战争史，没有一个军事家去研究任何一场战争如何用一个统一的模式去打.著名的兵书，都只谈战略战术的原则，如孙子兵法十三篇.所谓名战役都是指出奇着取胜的战役.这里评价创造性思维，不是兵书上的教条或套用了以往那个案例，要的是实效而不是摆什么阵势.毛泽东的军事思想在创造性与灵活性上达到了一个很高的高峰，人们从毛泽东指挥过的大量战争中受益匪浅.反面的案例也是多得很，人们也可以从中得到启发.曾格林沁把清军摆成一排一排地冲向侵华帝国主义军队，面对洋枪洋炮，白白送死，多么愚蠢！如果用毛泽东军事思想(以消灭敌人有生力量为目标)来指挥，你可以绕到敌人背后打它，或把敌人引入死胡同，关起门来打狗.在中国自己大地上进行反侵略战争，竟然不会灵活地利用地形地貌、天时地利，岂不可笑！

在用应用数学解决实际问题时，也是这样：在数学上拼个高低，似乎不是聪明的做法；避开数学上的难点、迂回取胜的做法，应当受到称赞，值得提倡，它是应用数学的一种境界.创造性思维表现在实效上，用“简单”、“初等”的办法抓住实际问题的特殊本质，“吃掉”它，这就是美.它不在乎于采用什么“理论”、玩什么“花样”.华罗庚强调的应用数学创造性研究，其创造性和灵活性的含义与纯粹数学研究的创造性，既有相同的地方又有其特点和独到之处.在谈到创造性问题时，华罗庚特别指出在一些人中，存在奴性和自

卑心，什么都得看外国人怎么说，看人家眼色，人家说“是”才算数.比如他从事应用数学探索工作，这个工作要从普及做起，结果引来了四面八方的非议.这些非议有的是受外来思潮影响的，说什么大数学家去搞普及，难以理解.后来外国人说这种普及工作有创造性，这是百万人的数学；人家肯定了，这些人的心也就平静了.华罗庚说，我行我素，我干我的，认定方向是对的，就坚决走下去；做在我、评在你.你看他满腔热血、对应用数学的探索多么热忱、自信、独具英雄气概.不愧为大师、不愧被外国人称为中华民族的民族英雄.

当华罗庚与西方世界隔绝30多年，1979年第一次出现在欧洲国际学术舞台上时，西方学术界为之震惊！当时国内数学界有人担心华罗庚讲数学应用与普及，没什么可讲；有的还担心普及的东西水平太低，影响他的形象.华罗庚知道自己从事数学普及工作的创造性水准，他极其自信、他堂堂正正地站在英国、法国、德国、美国、日本……等国家著名的国际学术讲坛上，介绍他如何用折迭纸条的办法给中国大众讲解优选法中的“黄金分割法”.他最后几分钟站的一个讲坛——日本东京大学的讲坛上，留下的一张珍贵照片，他手中拿着纸条正在讲解…….这么多国家的数学家在聆听他的普及数学学术报告，没有一个不折服他的创造性的形象教学法，以及这种形象教学在中国大众中产生的数学教育的效果.他们认为“华罗庚站在学者与教师崇高的地位上，……，他不仅是一位卓越的研究工作领导者，而且是一位多层次教育的杰出导师”.

我们应当树立我们自己的自信心，发挥自己的创造力；我们也要善于学习人家的长处，继续探索自己应用数学的道路.

§9.3 道路、思想与方法

华罗庚对于在中国如何开展应用数学研究，这条道路怎么开辟，怎么走？40年代有个美好的设想，他希望有人去干他所罗列的应用数学条目，结果落空.50年代在他受命组建中科院数学所

时，他主张数学所里面应包括计算数学、力学、理论物理等研究室，希望数学能跟有关学科加强相互间的有机联系；应用数学能用这种方式先打下基础再发展起来，这也有利于那些学科的发展，结果也未能实现. 在制定我国 12 年科学发展规划时，他又一次强调应用性比较强的数学分支，如概率统计、微分方程的发展. 当时中国的情况是用“理论联系实际”作为批判旗子，但谁也不知道怎么“联系”实际，谁也不知道怎么搞应用数学. 结果反而把一心想发展中国应用数学、而且搞应用数学尝试最多的华罗庚，贴上不搞应用数学的“标签”，予以批判. 这迫使华罗庚提早“下水”探路，探索在中国发展应用数学的道路，他说：“看谁搞的是真正的应用数学？”

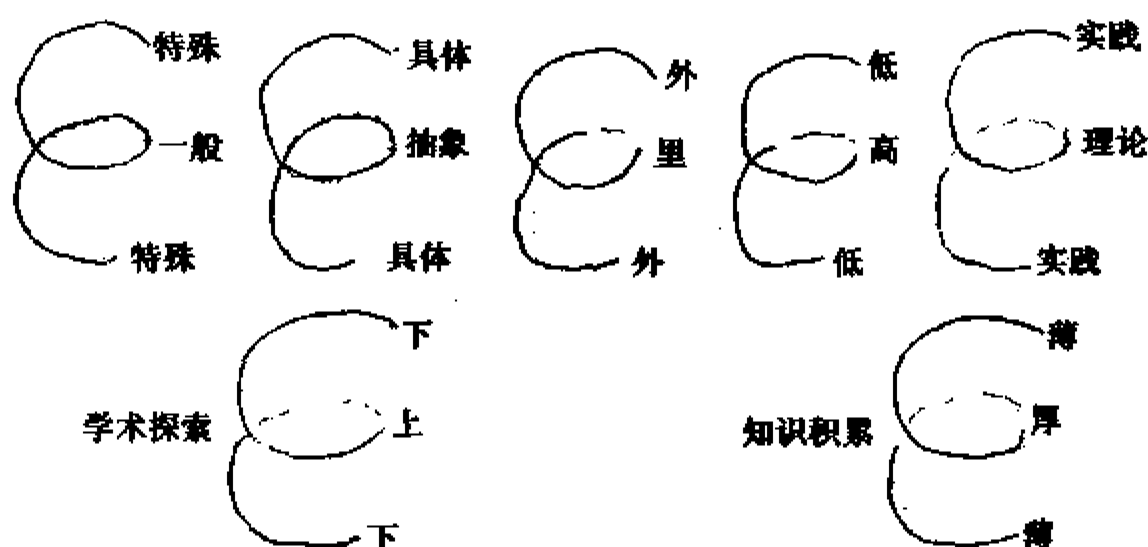
本书前面许多地方都提到华罗庚决心探索中国应用数学发展道路后，遇到了重重困难，开头真是无从下手. 他和王元到处寻找数学能用得上的问题，这是一个非常艰苦的过程. 应该说那时在中国大规模地开展应用数学工作，时机还不成熟. 原因之一是当时数学界对应用数学的认识是很肤浅的，不知什么是应用数学，不知怎么搞应用数学. 人们甚至不知道怎么用数学. 当时比较适合为数不多的数学工作者，开展华罗庚应用数学分类观中的第一、二类应用数学研究；原因之二是当时社会对应用数学的需求还不够. 应用数学与纯粹数学不同，纯粹数学的发展有其自身内部的矛盾推动. 应用数学发展除了它的内因外，非常重要的一点是外界社会的需求推动. 华罗庚选择了普及数学方法做起的正确道路，即使是这样，好不容易选择了“统筹方法”作为普及数学第一法，在第一次试点时，几十名师生花半年时间基本上失败了. 这说明难！在当时这是有风险的！华罗庚尽管站得高、很自信，他说他有他的“优势”，毕竟这也是一种冒险行为. 因为社会上人们不认识数学有用，工厂工人数学文化素质比较低. 你用普通的教学法教他，他不懂. 所以华罗庚在普及时，首先要有创造性的教学法. 这只有华罗庚这样到处充满创造精神的数学家才能办到. 第一次试点失败，华罗庚有魄力进行第二次试点，这大概也只有他能达到这种境界. 这里他说的“优势”确实起了决定作用. 我们理解他的“优势”就是他从年轻时

代起磨炼的品格、学识、顽强拼搏精神和他特具的方法论，以及他在中国人民心中形成的权威．如果不是华罗庚而是别人，也选择从普及数学方法做起的道路，在当时的中国经济社会发展水平，此路恐怕难通．头一次试点一旦失败，各种非议扑面而来，一般人是吃不消的．

在世界数学史上，从纯粹数学家走向应用数学家，或者既是纯粹数学家又是应用数学家的伟人是极少的．这样的伟人有一个共同的特点，就是其方法论的独特性．有的大数学家，他完全是纯粹数学家，他的方法论非常适合于在纯粹数学领域攻坚，但不太适合搞应用数学，即使逼着他去搞，比如二次大战形势逼迫；又比如中国当时“数学理论联系实际”下厂下乡的强大压力，他只能屈服去劳动，但他决不会走上应用数学的道路．华罗庚的方法特点中适合搞应用数学的有：“华罗庚数学工作的特长是他的初等与直接方法．”（冯康），“一些对华罗庚了解不深的人往往以为他的最大优点是逻辑推导与计算能力强，其实他最强的数学才能恰好是他的数学直觉．”“华罗庚的另一个特点是先从一个具体而简单的特例着手研究的单刀直入式的研究方式．”（王元），正是这种方法论上突出的特点：“初等与直接的方法”、极强的“数学直觉”、“从具体而简单的特例着手”、“单刀直入式的研究方式”……才正适合于应用数学研究，成了华罗庚应用数学研究在方法论上的基石．华罗庚在中国科大设立应用数学系，进行应用数学人才培养工作的试点．他希望学生学好数学基础理论，同时还特别在方法论上给学生以启发．他的讲课不但深入浅出，触类旁通，举一反三，而且反复告诫学生没弄懂 2 维、3 维的，就不要跑到 n 维去，反复强调以下的螺旋式上升的认识辩证关系（见下页图）．

探索应用数学发展，不同国家有不同的道路；在同一个国家，不同的领头人就有不同的道路．中国的领头人华罗庚 20 多年带领大家走过的是一条特殊的路．评价他走过的路，那是后人（数学史家）的事情．毕竟中国由于华罗庚的探索和开拓精神、探索和开拓的不懈努力，中国的应用数学走出了一条路子，有了现在的面貌，

为今后的发展铺平了道路.过去是走过来了,但只走到现在,今后怎么走?今后的路在何方?还要继续探索,这也是华罗庚最为关心的问题.



路是人走出来的,人才(应用数学人才)在什么地方?应用数学的人才又怎么培养.这也是他关心的另一个重要的问题.

华罗庚对普及数学方法,经过20多年的实践,已经有了一套比较成功的做法,包括普及数学方法的人才(队伍的组成)的培养.他认为在他带动下这条路是闯通了,有待于进一步提高、扩充、巩固,以求不断的发展.这是应用数学的一个重要部分,这种大众数学是应用数学更高层次发展的基础,应该有一批骨干力量在其中组织、领导,开展群众性运动.

创造型的应用数学,更需要探路.华罗庚希望有人去探路,他说他在应用数学方面,除了分圆域方法和建了一个“门”(门的两根门柱子是优选法和统筹方法,横梁是正特征矢量法)外,更多的是道路探索和方法论上的收获体会.他希望这些收获、体会能给后来探路人以帮助.一切有志于应用数学的人,所面临的第一个问题就是选择自己的位置,确定自己在应用数学的哪类领域中工作,是侧重于普及型还是侧重于创造型.不管你在哪个位置,华罗庚告诫大家:① 每个人应当有自己的阵地;② 一切都是实力政策.你必须做出成绩,显示出水平.不论别人评价你还是自己对自身的评价,都是这样的.

探路，不仅指的是如何发展中国应用数学道路的探索，而且是指个人如何走应用数学道路的探索，在个人探索的道路上，方法论是尤为重要的．在面向实际问题的应用数学领域里，当你一个人或一个群体面对一个实际问题时，你怎样下手，如何深入，怎么发挥你已有的数学武器的作用；怎么从实际问题中提取数学问题，数学问题怎么求解，怎么研制算法软件，计算机上算出来的结果与实际问题相符吗？如果相符，你怎么实施，如何判定实施后的效果．如果不符，你怎样从头开始．假如你面对的实际问题，非常复杂而且有许多不确定的因素起作用，用数学去描述它很困难，你又怎么办？面对这些问题，方法论是重要的．它引导你如何入手，给你思考问题，解决问题的总思路、总框架，或者说大致步骤与程序，加上各人的理论修养、自身的经验和悟性，灵活地创造性地应用．实际问题就可能得到解决．

当代以解决实际问题著称的智囊团都有自己独特的方法论，比如兰德公司的系统分析方法论、贝尔公司的系统工程方法论……，著名的科学家都有他个人独特的方法论，这些都生动地展现在他们的传奇传记中．这里我们不想也不可能全面地阐述华罗庚的方法论．我们仅对华罗庚在探索中国应用数学发展道路上逐步形成的应用数学方法论，根据华罗庚在日常工作、生活、尤其病在医院中对我们语重心长的教诲和人生漫谈，以及他一生的言行中，归纳出几个创新点，叙述其简要内容．

1．模型论

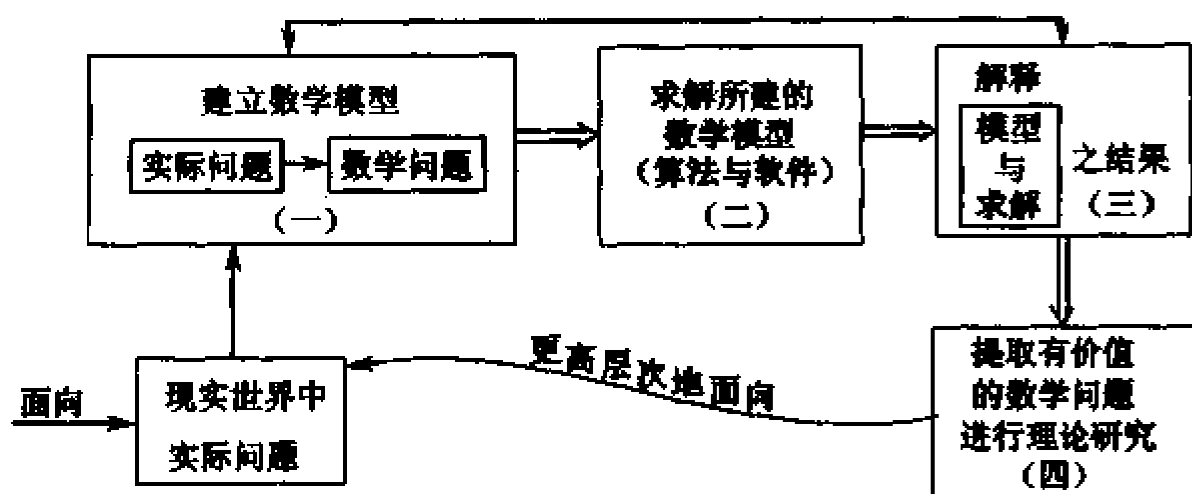
华罗庚赞成这样的观点："一切问题都是数学问题．""高技术的本质是一种数学技术．"因此，他对如何把一个实际问题变成数学问题的技术，也就是建立数学模型的技术，非常重视．谁能抓住某项高技术之本质是某种数学技术，他就给予极高的评价．在纯粹数学领域，说某项结果"令人惊奇"或"漂亮的论证"，那是一种很高的赞誉．华罗庚对某项高技巧的建模工作，也常用"漂亮的模型"、"令人惊奇"予以赞誉．怎么才能把建模工作做好，这不是一句话就能解决的事．在建模之前必须对该实际问题的背景，物理结构框

架、逻辑结构运行框架、关键参数及其关系,已占有信息进行系统分析.这首先要进行周密的调查研究.这种有明确目的之调查研究是建模的关键.在调查研究的过程,要善于学习,学习自己不熟悉的东西;这就要接触很多外行和同行的专家,因此要善于团结.这个过程很艰苦,纸上谈兵,蜻蜓点水,要切忌,因此,要实干.他很赞成建模过程的"泡"和"悟","泡"就是深入实际,把自己思想技巧与实际问题及其背景泡在一起,与多学科合作者、实际工作者泡在一起,这有一个艰苦的过程,才能抓住问题的实质,反对下车伊始就发言、就建模;"悟"就是在这整个过程中,不断地去悟出问题的特性、解决问题的真谛.

既然一切问题或者说一切事物都有其数学结构,那么作为应用数学工作者为了解决这些问题,就要善于抓住这些问题的本质,描述其数学结构,建立其数学模型.换言之,一切问题都有其数学模型,要解决我们所关心的某个问题,首先就要对它建模.这就是华罗庚的模型论.

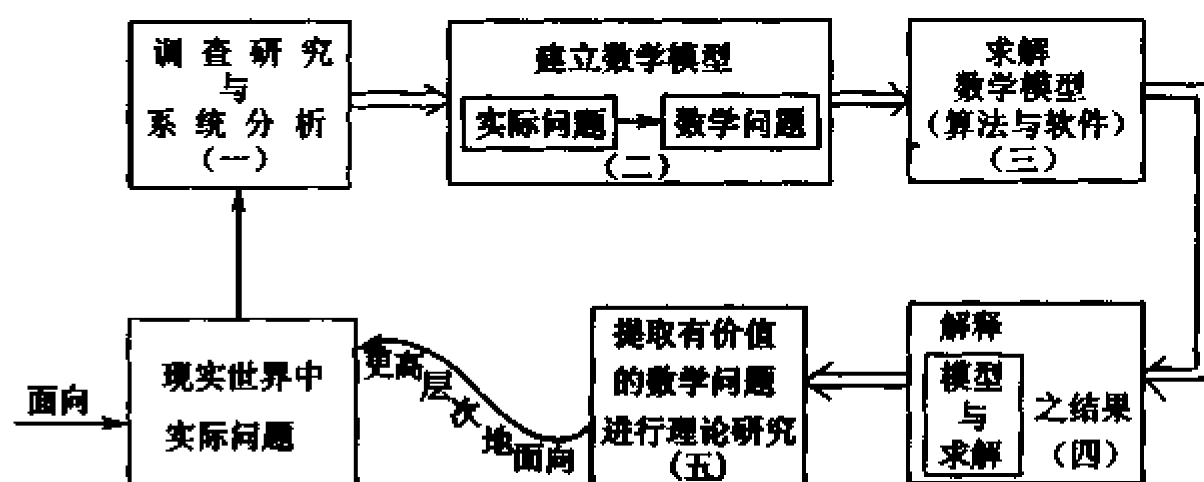
当然世间事物千差万别,有结构化问题,也有非结构化问题;有肯定型的,也有非肯定型的;有精确决策,也有模糊决策;有静态的,也有动态的;有连续变量的,也有离散变量的;……,但不管怎样,总可以用某种方式去建立数学模型.

2. 模型算法一体化、"四步"→"五步"→"四步"



前"四步"方法论

有位著名应用数学家在长期的解决实际问题的过程中，总结出了一套解决实际问题的方法论，称"四步"方法论.华罗庚很赞赏这位应用数学家的"四步"，以上已经说明华罗庚很重视建模的过程，认为这是解决问题之关键.因此，他在"四步"的基础上加上一步，形成了"五步"方法论.这加上的一步叫做调查研究和系统分析，加在建立数学模型之前.他强调这一步的重要性，认为一切产生于调查研究之后，数学模型建立的好坏，关键在于这一步，在于调查研究和系统分析.



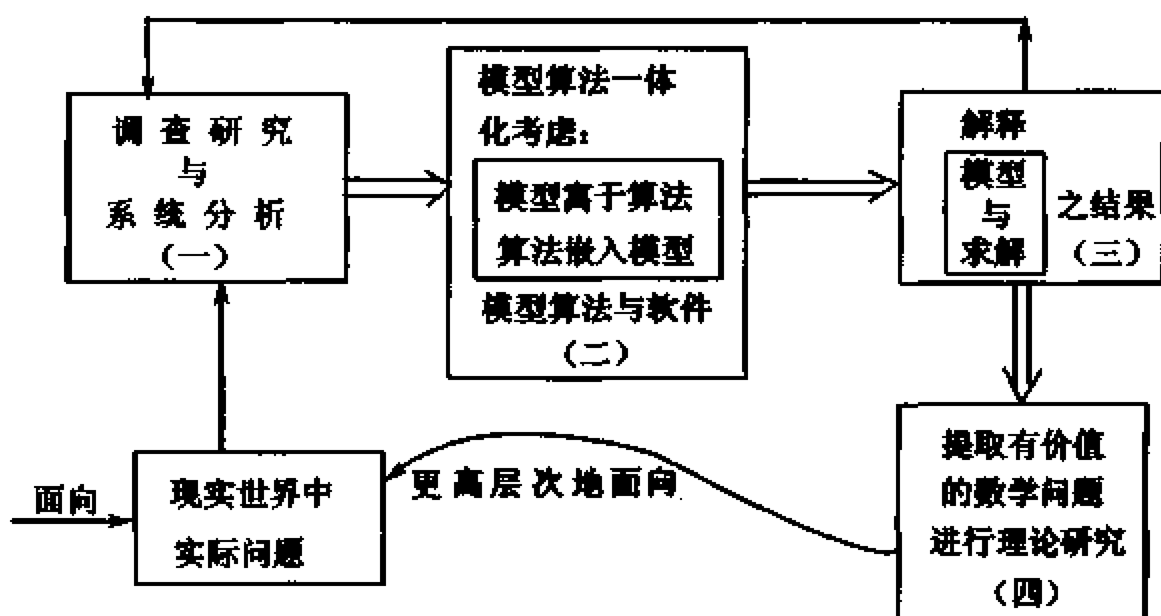
"五步"方法论

我们在华罗庚指导下经过长期的研究与实践，在方法论上，又把"四步"或"五步"中的建立数学模型与求解算法合成一步，这样把两步合成一步统一为一体的思考，提高了建立数学模型的创造性，称之为

"模型寓于算法，算法嵌人模型."

这种思想方法的重要性在于：

(1) 避免了模型与算法分离造成的算法研究的被动和难度.同一个实际问题可以建立许多不同的模型，按自然语言翻译成数学语言的建模工作，仅是描述而无目的性，属于初级建模，它给算法研究带来被动，往往难以求解或无法求解."新手"多属此类，由于无法求解的困惑，人们常常会灰心退缩.模型算法一体化的思考，可以尽量避免由于模型和算法分离造成的算法研究的被动.



后"四步方法论"

(2) 拿现成模型去套问题,这又是"新手"的通病,加上急于求成,更易患此病.新的思路就可以避免之.

(3) 可以避免建模工作中的先入为主的毛病,建成模型后如果不适用,一般人很难重建,缺乏经验的新手,易陷入绝境,即如果只顾用数学语言描述问题,这样的模型一旦在脑中先入为主,很难自拔.

(4) 模型算法统一为一体的思考方法,是以解决实际问题为最终目标的,为了解决实际问题,建模者不但要充分调动自身的知识库和方法库,还要善于学习,向实际学习,向别的学科学习,利于自身技能的提高和多学科之间的协作以及知识的交叉与综合.

(5) 模型算法统一为一体的思考,更能做到:抓住问题特殊性,建立特殊模型,给出特殊算法,问题解决得更加有效.

(6) 新的建模思想集中体现了数学思想与技巧在应用数学中的运用,同时也是应用数学美学观点的集中体现(如同纯粹数学).便于提高应用研究队伍的技能,提高其对应用数学的兴趣,培养其数觉,数觉是小平邦彦提出来的.纯粹数学和应用数学研究都强调数觉,应用数学研究也许更应强调数觉,因为大多数应用数学家是

属于直觉主义流派.

3. 更动目标函数或约束条件的思想

从应用数学的基础理论研究角度考虑问题,它关心优化数学模型的一般理论与方法的研究.比如,线性规划的一般理论和算法的研究(诸如单纯形算法、Karmarkar算法等等),以及非线性规划的一般理论和算法的探索.他们认为既然有了线性与非线性的一般数学模型,数学工作者的任务就是研究其一般算法.这种从一般性、普遍性的角度去研究事物是非常重要的,这是人类认识世界的重要方式.

从应用数学的应用研究角度考虑问题,它直接面向实际问题,最终目标是解决实际问题.它更关心实际问题的特殊性,这也是人类认识世界的重要方式.当然人们很希望有一般理论与方法能套用在该问题的解决上(这是求之不得的好事).但是,往往一般理论和方法还处于初级阶段,还远不能适应这种需求.在这种情况下,先去追求一般理论和方法的研究,再用它去解决实际问题,这种途径,一般说来是不科学的、不现实的;另一种途径就是特殊问题特殊解决,寻求具体问题具体分析的做法,建立特殊模型,给出特殊算法,尤其是模型与算法一起考虑的思路.

实际问题往往非常复杂,对其了解、分析透彻的,可以走模型与算法合二而一的途径,普通研究者还不能完全做到这点.模型既要不失真,又要有特殊算法与其配合,这非常难!因此,以自己最好的方式完成建模后,往往还需要进一步研究算法,此时有两条路子,其一是循规蹈矩的数学化研究;其二是灵活的数学化研究.

灵活的数学化研究,就是根据问题的特性采用特殊的数学技巧,适当地改变其目标函数或约束条件,既不使改变后的模型失真,又使改变后的数模具有特殊的算法.其背景是:一个实际问题有很多数学模型,而这些数模的最优解是一样的.这很多个数模中有一类(或一个)是与自己已建立的数模在目标与约束上具有大致相同的形式,只在目标或约束上,稍有区别.但正是这样稍有区别之别,往往给我们解决问题带来转机,能够形成特殊算法.循规蹈

矩的数学化研究，实际上是完全受缚于已建立的数学模型的目标函数和约束条件.这种固定模型的严格化处理，可能是无路可通的.

人们在认识上往往受传统习惯势力的限制，面对一个实际问题，通过一定分析得到了描述它的数学模型.现在需要求解它！人们的目光一下子完全集中在求解自己建立的这个特定的模型上，比试水平的高低，完全看你有没有办法求解自己建立的特定模型上(自己给自己出的难题上!).在一个群体在一起工作时，会出现这样的情况，大家都只顾自己的面子，千方百计想法求解所建的模型，似乎说连这样的模型都无法求解，自己的数学水平也太低了.有的人甚至会说作为一个数学难题，我也要把它攻下来.这时很少有人提出能不能动一下模型.至少可以问一下：模型建得好吗？有没有别的建法？这可以看出，应用研究如果跳不出纯粹数学的圈子，思路会受到很大的束缚，就连自己最根本的目标——解决实际问题，都忘了.

从最终目标是为了解决实际问题看，当你面对一个实际问题时，最初，既无数模也无算法.理论上讲，对这个实际问题，可以建立很多个数学模型，人类掌握了很多方法.人们走的是这样的一条路：一旦建立了数模，就试图从人类掌握的(或者说自己掌握)的方法库中寻求一种求解方法.这就固定模型寻求求解方法.人们几乎都走这条路.除了上面提到的传统习惯的影响原因外，从实际问题中提取数学模型非常难，也是重要原因.人们一般不敢轻易更动自己辛辛苦苦建的数模，一旦更动易造成失真.

我们从模型、算法固定和变动的四种形式组合上分析一下，也许能看得更清楚些：

(1) 定模动法，这就是以上刚提到的，模型固定了再去寻求求解算法的做法，人们常走的路子.

(2) 定模定法，人们手中掌握固定的方法，去寻找能用此定法解决的实际问题的特定模型.即只有在实际问题必能建立此法生效的特定模型时，此路才通.普及数学方法时就是如此.

(3) 动模定法，只有当面对的实际问题形成的数学模型、更动后既不失真，又可以用手中掌握的固定方法去解决时才有效. 普及数学方法时也常遇到这种情形.

(4) 动模动法，这是说当面对的实际问题形成的数学模型，只有通过更动模型(目标或约束)，才能在自己掌握的方法库中找到一个方法或创造性地提出一个新方法与这个更动的模型相匹配，它恰是解这个更动模型的好方法.

这种更动目标函数或约束条件，或两者同时更动的方法，我们称之更动目标约束法. 实践证明，它是非常有效的.

4. 要充分认识比定理更重要的东西

纯粹数学的进步在于各种创新工作的突然出现，而创新是各式各样的，比如新的概念和新的技巧在解决某个纯粹数学问题时的突破，这些突破性的成果又以新的概念和新定理的形式出现在令人兴奋的论文中.

以解决实际问题为目标的应用数学研究，与纯粹数学不完全相同，它的突破性成果往往不是以定理形式出现，而是解决问题的思想、技巧形成的一些原理、原则、算法，这些原理、原则、算法常常不是出现在论文中，而是出现在研究报告中. 事实上，在纯粹数学研究中，一些原理、原则、算法也比定理还重要，比如鸽巢原理(抽屉原则)，多少数学家用它解决过不知多少难题；又比如归纳法，那是一种算法式的证明程序，它为数学家解决的难题数不胜数. 应用数学研究中除了运用纯粹数学的原理、原则、算法外，还有它自己特有的原理、原则、算法. 比如，动态规划中的最优化原理；求解整数规划中常用一种算法技巧——分支定界原理，这是众所周知的. 在应用数学研究中，像模型算法一体化思想、更动目标约束思想，如同以上提到的原理、原则一样，它是一种思想. 但有这种思想和没有这种思想，在解决实际问题时是大不一样的. 思想、原理、原则，它的具体应用完全在于使用者的技艺和灵活性，如同一个棋手的下棋艺术，一个外科医生“一把刀”的使刀技巧.

华罗庚在中国探索并发展应用数学时，希望中国的应用数学

研究要有自己特殊的思想风格．中国古代数学就有其独特的体系和独特的表现方式．西方的欧几里得体系着重抽象概念与逻辑思维以及概念与概念之间的逻辑关系．我国的传统数学则不同，它基本上是一种从实际问题出发，经过分析提高而提炼出一般的原理、原则与方法以最终达到解决一大类问题的体系．这种体系也十分完整与严密，形成了特殊的思想风格．

这里必须说明两点：

(1) 西方的欧几里得体系在世界数学发展史上占着极其重要的地位，至今仍是基石，它建立了一整套世界各国公认的，抽象、严格的逻辑证明体系，推动着纯粹数学各个分支的发展．在东方，古代中国数学发展走了另一条路子，长期以来人们清楚地分析了这条路子给中国数学发展带来的负面影响、甚至十分痛惜．以上叙述不过想强调一下中国古代数学发展中也有其精华部分，我们要肯定它、继承发扬它，尤其对于应用数学更是如此．在当今计算手段高速发展的信息时代，人们要用数学去解决许许多多实际问题．面对这些实际问题时，中国古代的数学思路与当代数学思想之结合，是十分有益的．

(2) 在中国，应用数学的发展，从道路上讲，比纯粹数学更艰难些．人们对它的认识有相当大的误区，甚至出现两个极端片面看法：一种认为应用数学太简单、没什么思想、不值一搞；另一种认为应用数学要解决实实在在的实际问题，太辛苦太困难了，不如搞理论花得来．还有，在纯粹数学中公认的东西，在应用数学中出现，人们不一定认可，即使认可，份量也轻得多．前面提到的"原理"、"原则"、"算法"程序，就是一例．这些东西出现在纯粹数学中，人们视之为宝贵思想；出现在应用数学中，就不以为然了．这就不利于正确评价应用数学工作，也就影响了人们投身应用数学的积极性，影响了应用数学的发展．

更动目标、约束思想，是在某种意义下寻求等价的另一种数学模型，以便更灵活地寻求其求解算法的另一种途径．数学上完全严格的等价形式，在纯粹数学研究和应用数学基础理论研究中是常

见的.但从应用研究角度看,人们的目的在于解决实际问题.因此,我们视“等价”一词有更广泛的含义.这正如 G. B. Dantzig 所说:“许多现实问题的提法,带有某种柔性(softness),即缺乏精确性,这就允许它们有许多等价的数学表达方式;我们所说的等价,并不是数学中一一对应意义之下的等价,而是指在应用目的方面的等价.从人们寻求解答的观点来看,问题的一种提法恰巧与另一种提法同样令人满意,但也可能一种提法可用数学方法进行分析和求解,另一种却无望用数学方法解决.”而我们提出的更动目标约束法提供了数学与实际结合的更广泛意义的等价含义.

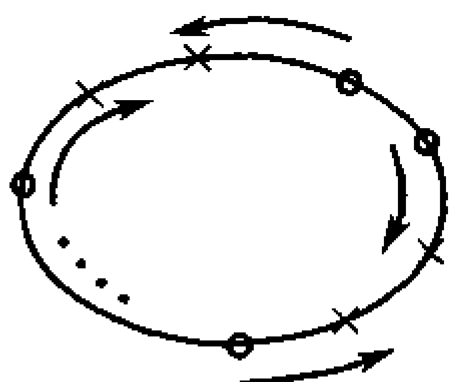
5. 模型算法一体化思想、更动目标约束思想的一些实例.

(1)模型算法一体化思想在应用数学好的模型和算法中,得到了充分的体现,只不过人们没有像华罗庚那样认识它、抓住它.以下是些实例:

① 图上作业法.

1958 年,中国曾普及推广一种特殊的应用数学和运筹的方法,就是中国独创的运输问题的图上作业法.模型就是在交通运输示意图上,标好需要调运的某物资的收发地点及收发数量.

如果道路不成圈,按口诀“抓各端、各端供需归邻站”办,就得最优方案.



如果道路有圈,则先在图上做流向图.所谓流向,就是从发点到收点间的货运方向.统一规定,从发点到收点的路线右旁画一条带箭头的线.按以下口诀办也就能得最优解.口诀:

流向画右旁,对流不应当;

里圈与外圈,不超半圈长.

如果不满足口诀,就在图上调整,故称图上作业法.

这是一个模型算法一体化的典型实例.它有一般的模型,那是一个线性规划模型.

设有 m 个发点,各有 a_i 单位物资($i=1,2,\cdots,m$);n 个收点,各收 b_j 单位物资($j=1,2,\cdots,n$).从第 i 个发点到第 j 个收点的距离为 d_{ij}(公里),且 $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$. 请给出最好调运方案,使总运输力最省?

假设从第 i 发点运往第 j 收点的物资量为 x_{ij},那么这个运输问题的一般数学模型为

$$\min \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} d_{ij} x_{ij}$$

$$\text{s.t.} \quad \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, \\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, \\ x_{ij} \geqslant 0, i = 1,2,\cdots,m, j = 1,2,\cdots,n. \end{cases}$$

它可以用线性规划的一般算法求解.

② 中国邮路问题

邮递员从邮局出发,跑遍他所负责的投递街巷,把邮件和报纸送到居民手中,然后回到邮局.问他该怎么选择路线,才能使走的总路程最短?

这个问题的一般数学模型是一个特殊的线性规划问题.

根据问题的特性,管梅谷提出了一个模型算法一体化的方法,称奇偶点图上作业法.国外文献上称之为"中国邮递员问题".华罗庚很赞赏管梅谷的贡献,称他为"山东第一条好汉".

③ 统筹方法

统筹问题中的模型算法一体化就不必重复了.本书在前面已经把它的模型与算法详细讨论过.

④ 优化问题中的许多好算法,仔细琢磨一下,也都是模型算法一体化的,比如线性规划的三个主要算法.线性规划的一般模型是

$$\max(\min) \quad c^{T}x$$

$$\text{s.t.} \quad \begin{cases} Ax \leqslant b, \\ x \geqslant 0. \end{cases}$$

G. B. Dantzig 为了给出单纯形法，他把线性规划的不等式约束，变化成他的标准模型——等式约束. 只有在等式约束的模型上，才能施行他的单纯形算法.

L. Khachian 的椭球算法的标准型是严格不等式；N. Karmarkar 算法的标准型不但要求是等式约束，还有更多的其他条件.

不过，这些是理论上追求的算法，它的模型算法一体化与从实际问题中建模达到模型算法一体化，是不完全一样的.

⑤ 基于模型算法一体化思想的一种新的线性规划算法.

这个新算法发表在《中国科学》1998，第 28 卷第 1 期. 众所周知，线性规划已有三个主要算法：1947 年 G. B. Dantzig 提出了单纯形算法，经过四分之一世纪的实际应用，效果不错. 但在 1971 年，V. Klee 和 G. L. Minty 给出一个例子，说明单纯形算法不是多项式时间算法. 1979 年 L. G. Khachian 给出线性规划的第二个主要算法，即椭球算法. 椭球算法是一个多项式时间算法；这在理论上证明了线性规划存在多项式时间算法. 但是，椭球算法在应用上是实际不可行的. 1984 年 N. K. Karmarkar 给出了第三个线规划的主要算法——投影尺度法，它也是一个多项式时间算法，在实际应用上，它正在与单纯形法竞争，一比高低，但至今也未能下最后的结论. 当 1979 年 L. G. Khachian 的椭球算法和 1984 年 N. K. Karmarkar 算法出现时，都曾经轰动世界. 1984 年底华罗庚根据他的深邃的数学直觉，曾推测说："线性规划可能存在一个非常简单、非常初等的算法". 也就是说，已出现的线性规划的算法，都还不是最好的算法，人们还应当继续寻求线性规划的新算法. 无独有偶，1998 年，S. Smale 为世界 21 世纪数学发展提出了 18 个问题，其中第 9 问题就是线性规划问题. 看来，线性规划新算法的研究在 21 世纪初可能会掀起一个高潮.

这里叙述的线性规划的新算法，是寻求线性规划有效算法的

一种尝试.它在构思上的特点是基于模型算法一体化思想,也可以说是在模型算法一体化思想引导下进行理论探讨的一项成果.前面我们一再强调模型算法一体化思想,对于面向实际问题以解决实际问题为目标的研究更为有效.这里是进一步说明在理论研究上,这种思想也是有效的.这种算法的另一个特点是它的核心算法,既简单又初等,有效地利用黄金分割法、二分法及其它简单计算方法.这种算法的第三个特点是无需矩阵求逆计算.线性规划三个主要算法中有实际应用价值的是单线形法与 Karmarkar 算法,这两个算法的基本运算就是大型矩阵求逆,计算量之大是容易看出来的.由于无需矩阵求逆计算,因此迭代过程中,不破坏原始方程系数,始终保持原始系数矩阵.计算误差(累积误差)小,精确度也就比较高,这点也优于单纯形法和 Karmarkar 算法.在单纯形法和 Karmarkar 算法中,由于不断求逆迭代,误差很大,容易引起失真.

还有两个特点也值得一提,其一是对于实际问题,在运行中的线性规划系统,本身就有一系列可行解.这些可行解对于采用单纯形算法和 Karmarkar 算法的优化过程是没有用的.可是对于我们的新算法,这些可行解就非常有用.其二是从理论上说,最初的若干可行解如何获取,一般来说,这些可行解的获取也只有像单纯形法和 Karmarkar 算法一样,采用大 M 法或二段法.但是我们给出了另一种求最初若干可行解的新算法,这就是基于更动约束法的新椭球算法.这种新椭球算法在下面我们马上就要提到.

新的线性规划算法的意义在于它是面对现实线性规划的算法,而不是主要在数学上的新算法.现实线性规划问题,由于它是客观运行的,它已有可行解,这些可行解对于已有的别的算法是没有用的.已有的那些算法必须用数学的方法,从它建立的模型(线性规划模型)中通过算法自身运算产生第一个可行解,有人估量从模型自身到第一个可行解的得到所花的计算量,大约是算法起动到获得最优解全部计算量的一半.客观运行的已有的可行解对新的算法是可用的.这就大大节省了初始计算量.另外,现实的线性规划问题,寻求的是得到比现在运行的方案好的方案,而不必是最

优方案.逐步改善的方案是人们所希望的,一步登天的方案往往是不现实的.新的算法正是可以从现有的可行方案出发,逐步优化,达到人们认为满意了就停止,未必要寻求理论上的最优.理论上的最优也许离现在的"满意解"不远,但还要花费极大的计算量.再说一个企业的利润假如是千万元级的,要求利润最大的线性规划问题,方案的目标值差几百元就可以不计较了,更不要精确到小数点以后的值了.

一句话,我们寻求的是实际可用的好算法,而不一定是数学上的好算法,这也是华罗庚的主张.他说,0.618 法是实际可用的好算法,即使在不是单峰函数的情况下也有效.如果从数学上考虑,应该对非单峰函数,研究它的求峰(谷)值的算法.遇到实际问题,首先要先判别它是不是单峰的,然后再决定用什么算法.

(2)关于更动目标约束法的实例:

在纯粹数学研究中,数学上严格的等价关系到处可见.在应用数学基础研究中,我们也常把一种数学模型按某种规则更动其目标和约束,转变为等价的另一种数学模型.比如:

①线性规划把原规划转变为其对偶规划

$$\max c^T x \qquad\qquad \min b^T y$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}Ax \leqslant b\\ x \geqslant 0\end{cases} \qquad \text{s.t.}\begin{cases}y^T A \geqslant c\\ y \geqslant 0\end{cases}$$

原规划 —— 等价 —— 对偶规划

②一些非线性规划也可以把原规划转变为其对偶规划.

③分式规划通过变量代换使其转变为线性规划:

$$\max \frac{U^T y_0}{V^T x_0} \qquad \text{通过变换 (Charnes-Cooper)} \qquad \max Z^T y_0$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}\dfrac{U^T y_i}{V^T x_i} \leqslant 1, i = 1,2,\cdots,n\\ U \geqslant 0\\ V \geqslant 0\end{cases} \qquad \begin{aligned} t &= \frac{1}{V^T x_0}\\ W &= tV\\ Z &= tU\end{aligned} \qquad \text{s.t.}\begin{cases}W^T x_i - Z^T y_i \geqslant 0\\ W^T x_0 = 1\\ W \geqslant 0\\ Z \geqslant 0\end{cases}$$

分式规划————————等价————————线性规划

④整数规划中 Gomory 割平面法，就是利用不断更动约束（割平面）的办法，寻求其整数解.

……

⑤变压器优化设计问题

这是我们在 1975—1977 年间完成的研究成果，曾获全国科学大会奖，中国科学院重大科技成果奖.我国电力变压器设计在此成果完成之前，一直处于手工设计阶段.此成果的完成标志着我国电力变压器设计进入了一个新阶段.对这个问题我们所建立的数学模型是混合型整数规划问题，求解难度大.后来，我们采用更动目标法，把原目标函数更动成两个函数的绝对值之和，形成一个等价问题.表面上看，问题的数学模型更复杂了（因为出现了函数绝对值的极值问题）.实质上，我们抓住了目标函数的特殊性质，给出了一种特别有效的算法.因为数学模型的描述需要很长的篇幅，我们简述如下：

原问题为

$$\min_{X\in S} F(x),$$

其中 S 为约束集合，其元素必须满足许许多多函数方程.它等价的更动目标后的问题为

$$\min_{X\in S}\{|P(x)-p_0|+|U(x)-u_0|\}.$$

以二维为例.由于 $P(x)$，$U(x)$具有特性：在 x_1,x_2 取值范围内，

ⓐ $P(x)$是 x_1,x_2 的降函数；

ⓑ $U(x)$是 x_1 的增函数，x_2 的降函数.

假定 $a\leqslant x_1\leqslant b, c\leqslant x_2\leqslant d$，我们取此矩形中心$\overline{x}=(\overline{x_1},\overline{x_2})$，其中 $\overline{x_1}=\dfrac{a+b}{2},\overline{x_2}=\dfrac{c+d}{2}$，我们计算 $P(\overline{X}),U(\overline{X})$.令 $P(\overline{X})=\overline{p}$，$U(\overline{X})=\overline{u}$.不论以下 4 种情形中哪一种出现：

Ⅰ. $\overline{p}\leqslant p_0,\overline{u}\leqslant u_0$，　Ⅱ. $\overline{p}\leqslant p_0,\overline{u}\geqslant u_0$，

Ⅲ. $\overline{p}\geqslant p_0,\overline{u}\leqslant u_0$，　Ⅳ. $\overline{p}\geqslant p_0,\overline{u}\geqslant u_0$，

总可以去掉原来矩形区域的一半，只需在剩下的一半区域中去寻找好的解.

这实际上是利用目标函数特性给出了整数规划分枝定界法的一种特殊技巧.如图1所示.这是一种特殊的平面区域对分法.华罗庚教授对这种灵活的处理技巧给予了很高的评价.

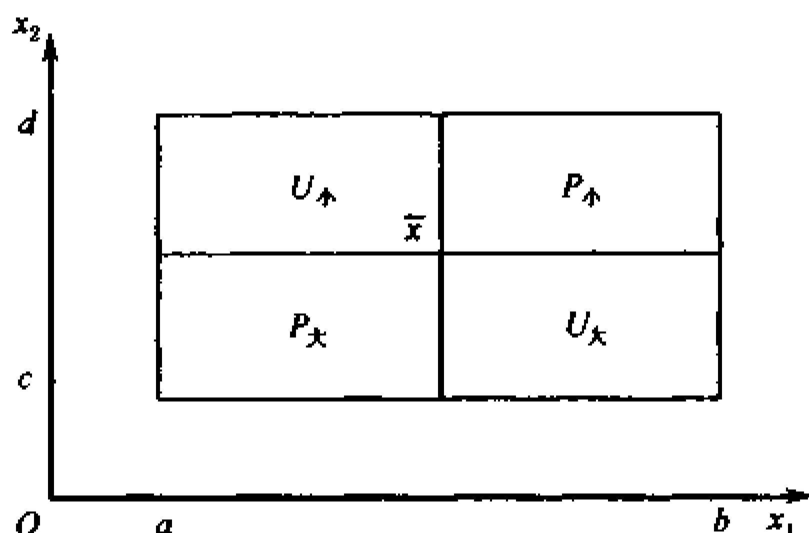


图1

⑥ 军队营房翻建经费合理分配问题

我军后勤营房翻建任务很重,合理分配这种经费对我军建设具有重大意义.通过系统分析与综合,我们建立了一个具有6 000多个整数变量、2 000多个约束条件的整数规划模型.为了寻找好的算法,我们采用了更动目标函数法,引进了新的概念,把目标函数更动为一个矩阵函数的极大极小问题.

为方便起见,我们简记原问题为

$$\max_{X\in S} F(x).$$

更动目标后的问题为

$$\min_{X\in S}\max_{i,j}\begin{pmatrix} A_{11}(x) & A_{12}(x) & \cdots & A_{1n}(x) \\ A_{21}(x) & A_{22}(x) & \cdots & A_{2n}(x) \\ A_{m1}(x) & A_{m2}(x) & \cdots & A_{mn}(x) \end{pmatrix},$$

其中 S 为约束集合,其元素必须满足2 000多个函数等式或不等式.

这又是一个从表面上看,把问题复杂化了的处理,实则不然,

根据问题的特殊性,我们给出了一个很好的求解算法.此项成果曾获国家科技进步二等奖.

⑦ 线性规划更动约束的一种算法

这是一种简便的近似算法.为了简洁,我们用框图表述之.算法的逻辑框图见图2.

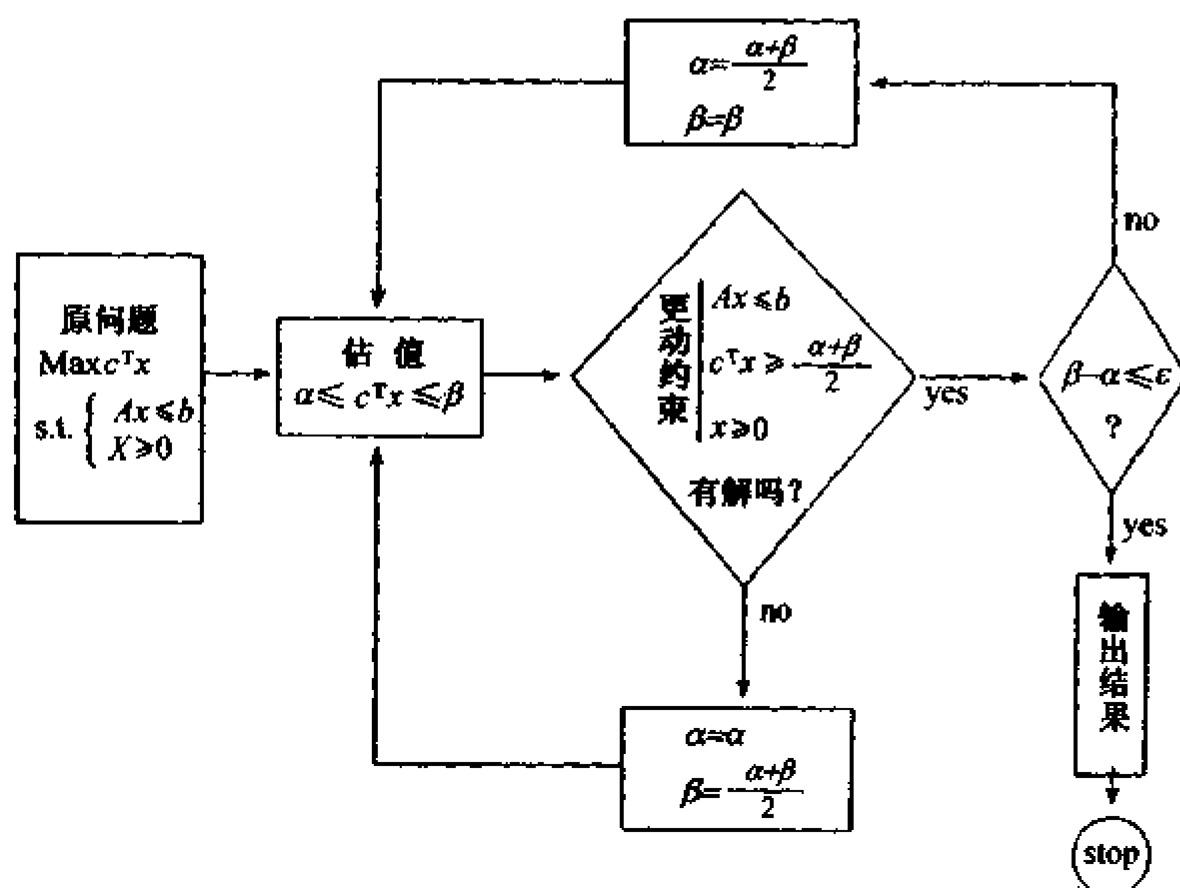


图2

许多实际问题的目标函数值的上下界是可以估算的.比方某个工厂建立的LP模型,它的目标函数是利润函数,而利润的上下界大约为$\alpha=1\ 500$万元,$\beta=2\ 000$万元,它们是可以估算出来的,那么,利用目标函数不等式

$$c^Tx\geqslant\frac{\alpha+\beta}{2}$$

增加一个约束,我们只要判定增加此约束条件后有无可行解即可.当然判定一个线性不等式组有无解,不是易事.但这可以利用单纯

形算法两段法的第一段算法.还可以利用我们提出的新椭球算法(见以下⑨).对一个实际问题来说,比方以上提到的工厂追求利润的问题,它无需求得数学上的精确解.利用以上更动约束法,经过目标函数取值区间的几次对分,也就满足要求了.这种算法既简单又易于控制,所以解决如此类型的问题是很有效的.

⑧ 多目标线性规划的一种算法

多目标问题,实际上是寻求一个各目标(各方)都能接受的,某种意义下的妥协解,一般说来,每个目标都达到最优的解,是不存在的.我们用框图(图3)来说明一种多目标规划的更动约束法如下:

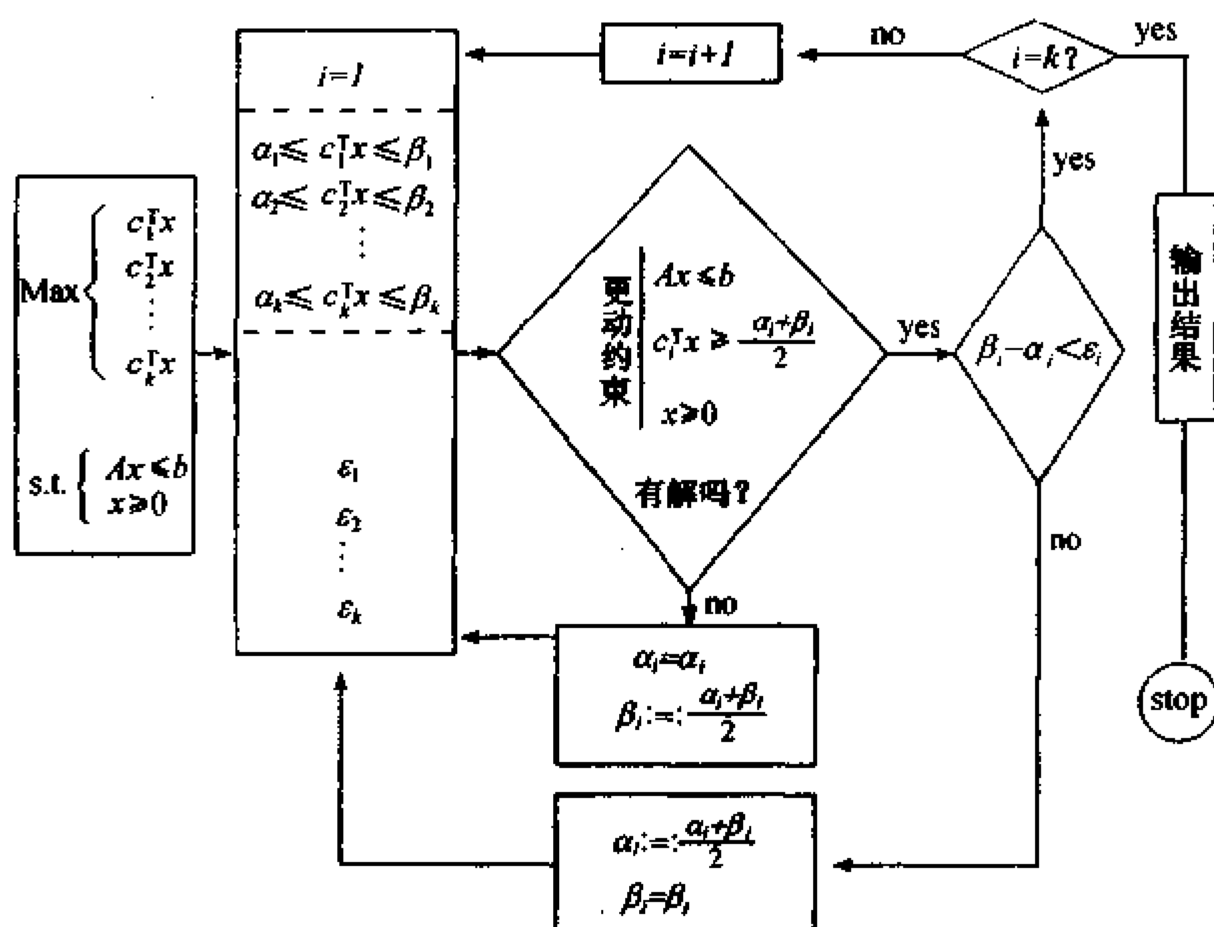


图 3

这里,估值 α_i, β_i 是事先给定的;ϵ_i 为妥协精度,也是事先协调好的.

⑨ 新椭球算法

这是一种基于更动约束的思想与方法，提出的求解线性规划的新椭球算法．它与 L. G. Khachian 的原椭球算法不同，在新算法的椭球迭代过程中，不仅用约束不等式割掉不合约束集的半个椭球（椭球中心不在约束集内时），称之为约束割；而且在椭球中心落在约束集内时，它用目标不等式割掉含约束集的半个椭球，称之为目标割．新算法的不等式系统是原规划（或对偶规划）的约束不等式与目标不等式组成的（规模小），而不是原椭球算法中的 K-K-T 条件组成的不等式系统（规模大）．这种新椭球算法，既有多项式计算复杂性的特性，又在迭代过程中得到一系列单调趋向最优解的可行解（在可行解存在时）．如果认为已得满意解，可随时停机．因此新算法更为实际、有效．对于实际问题，大多数是变量有界的，初始椭球不大，新算法更为有效．

这种新椭球算法，还给出了一种在数学上求线性规划第一个可行解的办法．到目前为止，线性规划求第一个可行解的办法只有两个：一个是利用单纯形法迭代的大 M 法，另一个是利用单纯形法迭代的两段法．

如上所述，新椭球算法有两种切割椭球 E_k 的办法：一是约束割，另一是目标割．而且对于每步迭代皆取这两种切割之一．切割后，我们必须构造 $E_{k+1} \supset \frac{1}{2} E_k$，使得 $\mathrm{Vol}(E_{k+1}) < e^{-\frac{1}{2}(n+1)}\mathrm{Vol}(E_k)$．

①如果 E_k 取约束割，构造 E_{k+1} 的作法与原椭球算法相同，此时 $x^k \notin \{Ax < b\}$，其中 k 是上标，则存在下标 i，使得 $a_i^T x^k \geq b_i$．

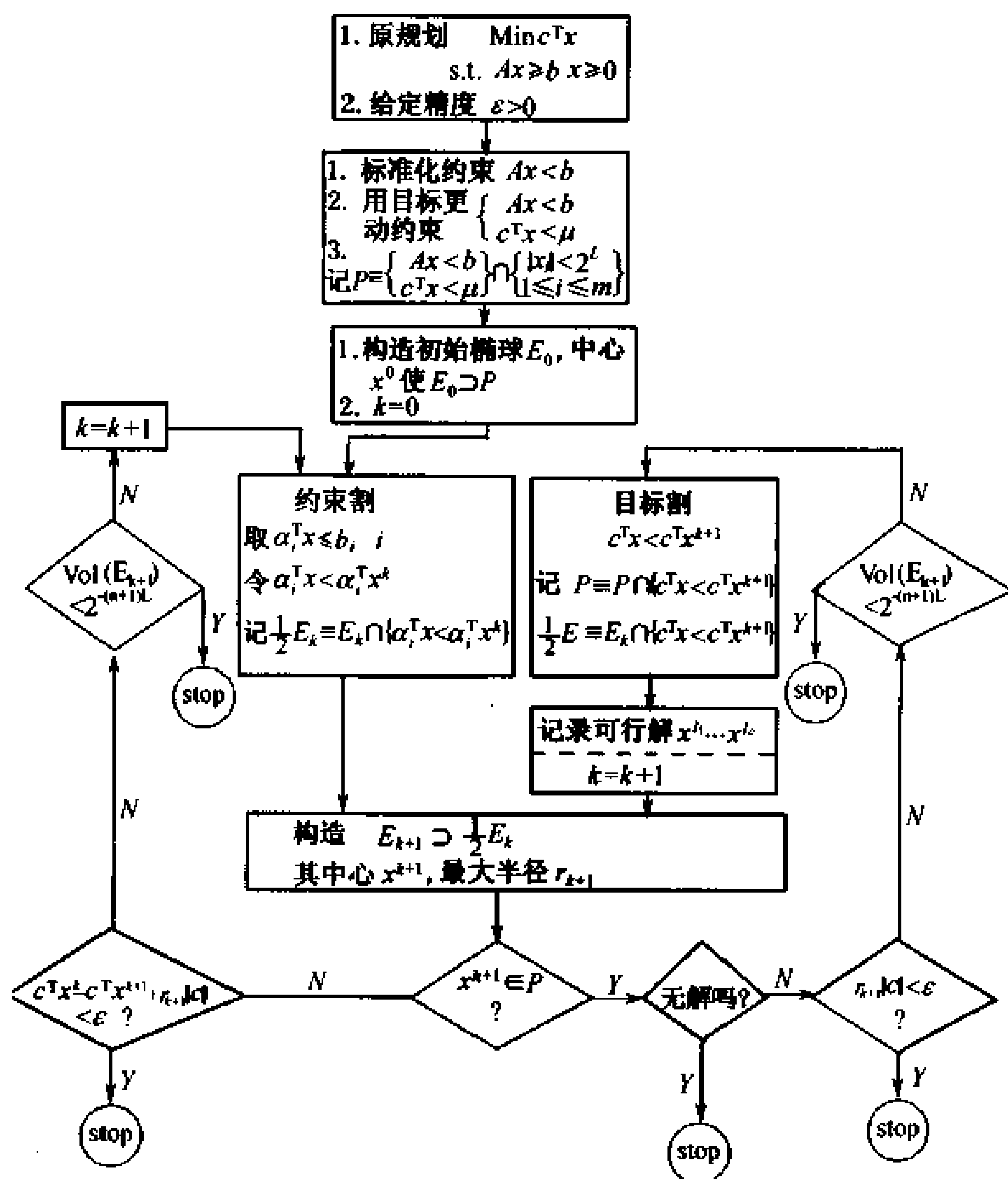
$$\frac{1}{2}E_k = E_k \cap \{a_i^T x < a_i^T x^k\}.$$

$$x^{k+1} = x^k - \frac{n}{n+1}(B_k a_i / (a_i^T B_k a_i)^{\frac{1}{2}}).$$

$$B_{k+1} = \frac{n^2}{n^2-1}\left\{B_k - \frac{n}{n-1}\left[B_k a_i (B_k a_i)^T / (a_i^T B_k a_i)\right]\right\}.$$

$$E_{k+1} = \{(x - x^{k+1})^T B_{k+1}^{-1}(x - x^{k+1}) \leq 1\}.$$

新椭球算法迭代框图为：



这里 $E_{k+1} \supset E_k \cap \{a_i^T x < b_i\}$. B_k^{-1} 是对称正定的，B_{k+1}^{-1} 也是对称正定的. $\mathrm{Vol}(E_{k+1}) < \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(n+1)}\mathrm{Vol}(E_k)$.

ⓘⓘ如果 E_k 取目标割，此时 $x^k \in \{Ax < b\}$，$\frac{1}{2}E_k = E_k \cap \{c^T x < c^T x^k\}$. 我们有：

$$x^{k+1} = x^k - \frac{1}{n+1}(B_kc/(c^TB_kc)^{\frac{1}{2}}).$$

$$B_{k+1} = \frac{n^2}{n^2-1}\left\{B_k - \frac{n}{n+1}[B_kc(B_kc)^T/(c^TB_kc)]\right\}.$$

$$E_{k+1} = \{(x-x^{k+1})B_{k+1}^{-1}(x-x^{k+1}) \leq 1\}.$$

这里 $E_{k+1} \supset E_k \cap \{c^Tx < c^Tx^k\}$. B_k^{-1} 是对称正定的，B_{k+1}^{-1} 也是对称正定的. 同样 $\text{Vol}(E_{k+1}) < e^{-\frac{1}{2}(n+1)}\text{Vol}(E_k)$.

ⅲ 初始化，当 $k=0$ 时，取 $E_0 = s(0, 2^{2L})$，$B_0 = 2^{2L}I$，$x^0 = 0$.

6. 二(多)次建模思想

更动目标约束法就是二次建模的做法. 我们这里说的二次建模具有更普遍的意义. 在不更动目标和约束的情况下使所建的模型通过二次建模变得更容易求解，也具有很高的智力技巧. 这里仅举几个例子说明这个问题.

(1) 变压器铁芯最大截面问题；

(2) 露天煤矿优化设计问题.

这两个问题的第一次建模都是整数规划模型或混合整数规划模型. 如果套用任何一种现成的整数规划求解算法，都难以实现求解的目的. 因此，我们进行了二次建模. 在第一次建模的基础上，我们又建立了它们图与网络模型. 把这两个问题的原来的数学模型化成一个最短路问题，利用动态规划最优化原理，我们给出了它们求解的很好的算法.

这两个问题的一、二次建模及其求解算法，详见有关文献(以上所有案例，详见《中国科学》1995 年第 25 卷第二期第 146 页的文献).

人们会问，为什么不能一下就建第二次的数学模型呢？看了这两个例子就会知道，没有第一次模型，不可能构思第二次模型，第二次模型不是直接从实际问题能提取出来的. 它是在第一次模型基础上的更高地抽象和提炼.

7. 关于“36 个字”

1982 年底，华罗庚在病中写了“数学方法与国民经济”一书的

征求意见稿，副标题为“统筹优选运营学”.该书分三部分，用“前言”、“中论”、“后语”分开.在该书中，华罗庚叙述了他过去提出的36个字：

大统筹，广优选，联运输，精统计，抓质量，理数据，建系统，策发展，利工具，巧计算，重实践，明真理.

他谈了36个字的形成过程，以及其中的主从关系，以便搞普及数学的工作者和后来从事应用数学的人能全面的理解掌握它.下面引述他的一段话：

“在本世纪中叶，……想把国民经济搞上去的愿望，明知学识和经验不足，宁可放着驾轻就熟的理论专长于第二位、硬着头皮进行尝试，初步归纳出12个字：

大统筹，广优选，联运输，策发展.

后来学习了国内外不少文献，觉得五光十色名目繁多，经过一定的大刀阔斧地去粗取精、去伪存真的分析研究，其林林总总，似易实同的东西可以概括发展为36个字(见以上提到的).经过分析再分析，有主有从觉得休道36个字，归根结底，重点还在于“统筹”和“优选”两法，也就是为“全国一盘棋”与“进益求精”两用的两法(常用“精益求精”，我改了一个字，请排印的同志不要“纠正”).”

“联运输不是在运输问题上求最优解吗？已有一套常用的方法，“线性规划”能解决这样的问题.统筹方法已注意“时”与“空”，策发展是用统筹原则来安排较长时间的计划问题.”

“统筹与优选之间也是密切配合的.”

8. 小结

综上所述，华罗庚应用数学思想与方法论的要点：

(1) 分类观点

不去无谓地谈论应用数学为何物？应用数学面很广、又是多层次的，必须分类认识之.不同类有不同的特殊本质，处理它必须有特殊的方法；不同类中又可以根据问题的所涉及的面和不同层次，分成细类或特殊专题加以研究.

评价应用数学工作，不同类必须有不同的评价标准.这才有利

于应用数学的发展.

(2) 创新意识

不要以为纯粹数学才强调创新.创新是第一位的,对于从事应用数学工作的人,不论在搞普及型的还是创造型的工作,都必须有创造性.任何人要做到:工作在我,评价在人;贵有内秀,不争虚名.

(3) 探索精神

要永无止境地探索应用数学的发展道路,探索解决问题的方法,探索应用数学人才培养.不在言,而在行;说万句,不如做一件.

(4) 基石与尖刀

华罗庚从事纯粹数学研究,在方法论上的特长,正是他从事应用数学研究在方法论上的基石与尖刀.这是决定他从纯粹数学研究转向应用数学研究的关键因素之一.

(5) 模型论

一切问题都可能是数学问题,都有它的数学结构,都可以建立数学模型;但是,同一个问题从不同角度描述它,可以有不同的数学模型.要解决实际问题,就要寻找其特殊模型.

(6) 算法论

在面向实际问题,以解决实际问题为最终目标的应用数学研究中,对所建的数学模型必须有求解的算法与之匹配,否则所建的数学模型是没有任何用处的.从这个角度看,算法研究成了关键性的.但这不是华罗庚的算法论观点.在华罗庚脑中常常有许多三角形关系,比如



他在考虑这些三角形关系时,常常不是线与点的联系,而是整体思维.因此,在考虑后一个三角关系时,他的算法论特点是:模型算法一体化思路,当然其基础是实际问题,这里的基础是考虑问题所依赖的与背景.如果不能达到这种境界,那么,就要强调"灵活"地处理,采用更动目标、约束思想、二次建模等手段,这就是他的算法论所提倡的.只有这样,才能真正解决实际问题,才能有创新.

(7) 辩证思维

在解决实际问题的过程中，模型与算法的形成，不论是一体化的还是经过更动的，关键在于对实际问题的调查研究和系统分析.在调查研究和系统分析中，必须有很强的辩证思维能力.这里不重复前面已提到的华罗庚辩证思维的方法，那是他一生做学问磨炼出来的.在他从事应用数学研究之后，他的辩证思维特点主要集中在三个方面：整体的思维方式，交叉综合的思维方式，以及逻辑思维与非逻辑思维(特别是形象思维)相结合的思维方式.形象思维在普及数学方法过程中起了重要的作用；在创造型的应用数学研究中起了更大的作用.对于客观世界中的实际问题，当它展现在你面前时，你对它感觉是不全面的，起初远不能抓住它的本质，人们总是从猜想开始，然后进行逐步地科学论证.这种猜想与纯粹数学猜想相比，更源于形象思维.有了形象思维，逻辑思维才能展开论证工作.所以，逻辑思维与非逻辑思维两种思维方式的结合，对面向实际问题的应用数学研究是非常重要的.人们可以举出许多通过形象思维方式建模的例子，尤其是通过形象思维建立模型算法一体化的框架的实例.

(8) 交叉、综合与开拓

许多实际问题的解决要靠多学科的交叉综合之合力；这种学科之间的综合与交叉，不但利于解决实际问题，也利于个人知识的开拓，开阔视野，开展创新工作.这就要求人们善于学习、会团结人.

(9) 群体论

应用数学研究强调群体力量、团队精神，这与纯粹数学研究不同.这种学科内部的群体合力，是解决实际问题的真正保证.华罗庚在普及数学方法时，依靠小分队的力量；在攻关解决重大实际问题时，依靠联合研究组集体的努力.他对群体的每个人要求：勤奋、实干.

(10) 基础论

华罗庚认为应用数学工作，不论是普及型还是创造型，要想获

得成功，非常重要的条件是要有雄厚的数学基础．当然应用数学的基础在深度和知识面的广度上，与纯粹数学的基础要求，不完全一样．但是他们在数学的思想和技巧的修养上的要求是完全一样的．

（11）后劲论

华罗庚的后劲论原先是对纯粹数学研究而言的，他认为从事纯粹数学研究的人，基础理论越雄厚后劲越大．后来，他在从事应用数学探索过程中，认识到应用数学更有后劲问题，而且对于面向实际问题的应用数学研究，除了基础理论厚薄影响后劲外，经验知识的积累多少也影响后劲；一般说来，随着工作时间的增加，这些非书本知识积累越丰富，这有点像中医大夫，越老越"神"，越老对实际问题的洞察能力越强．他私下说，这种后劲论不可宣扬，他说中国应用数学队伍，不论从数量上还是学术水平上，都差得远．假若一宣扬这种后劲论，怕就有人倚老卖老，以为能自然熬成仙，实为懒汉懦夫，一害本人，二害应用数学队伍的名声，要是那样，中国应用数学就要走弯路了，人们就更看不起应用数学了．

说到应用数学队伍，他心里是多么希望原来搞纯粹数学研究的和搞应用数学基础理论研究的人，有一批力量转向面对实际问题的应用数学研究；他多么希望这批力量也跟着他一起"下水"尝一尝普及味，再搞提高与创造．他认为这批力量是有后劲的，但必须转到面向实际研究的方向．他也很明白，这批人走上这一步很难，从思想上"跳出来，是很不容易的！"在谈论这些问题时，他甚至很激动，但最终他还是很理解他们，只是觉得非常惋惜！

（12）动力论

人们会问，华罗庚何以成为伟人？他一生勤奋、探索、创新、开拓、拼搏、爱国，他的动力来自何方？直至他一生的最后几年，重病在身，仍然战斗不息．大年初一，当一位学生劝他保重身体，少在外地劳累时，他急了并直言："死在家里，或死在外头，不是一样吗！？人家不了解我，你也不理解我！？"他仍在国内外奔波，最后战死在疆场（倒在东京大学的讲坛上，离开了人世，这在科学史上也是罕见的）．他何以能这样顽强的拼搏？他的动力来自：为了祖国、为了

中华民族.为了抗日战争,他放弃在英国剑桥的优越科研条件赶回祖国、在条件艰苦几乎与世隔绝的昆明苦战,就是一个明证;为了建设新中国,1950年他又放弃在美国的优厚待遇赶回祖国,又是一个明证;他这次回国时发布的公开信,铿锵有力地号召在国外的学者,为了祖国,为了民族,应该回去,回到祖国,共同建设自己的家园.他回国后呕心沥血为发展中国的纯粹数学和应用数学事业.他以毛泽东表扬他"不为个人而为人民服务"为最高奖赏,又是一个明证.学术上的为祖国、为民族、为人民服务,以及平时行动上为祖国、为民族、为人民服务的事情,比比皆是,举不胜举.

他教育自己的学生,干事业必须有动力,他指的动力就是,为了祖国、为了中华民族以及敢于接受挑战,敢想、敢干、敢拼搏的精神.这就是他的动力论.

附 录 I

数学及其在中国的发展*

丘成桐

今天被邀请来清华大学作演讲我感到很荣幸．历史上，清华曾对数学作过很多贡献．近代中国史上两位最著名的数学家就与清华大学有密切关系．一位是华罗庚教授，另一位是陈省身教授．特别由于陈教授是我的老师，我对能够在高等研究中心的开幕式上讲话感到自豪．也正由于这个原因我选择了这么一个演讲的题目．我打算先一般地谈谈数学，然后集中谈谈数学在中国的发展．

大家知道，在解放前，清华大学在数学方面是有非常优秀的传统的．后来，这个大学决定重点发展技术和应用数学．学习数学只是为了服务于技术和其他科学分支．然而，这种途径并不很有效，结果反而影响了应用数学的发展．如果考察一下中国的应用数学家就会了解这一点．我发现很难找到 40 岁以下的真正一流的应用数学家．过去的 20 年里，我和许多人讨论过这种现象的原因．发现原因是应用数学家在纯数学的基本技巧方面没有得到很好的训练．青年数学家有很大的学习潜能，他们应该学习纯数学的基本技巧．这不仅仅是我们中国也是全世界都应该吸取的一个教训．

应用科学需要数学．但同时，数学本身也是一门艺术．非数学家是很难理解这一点的．我们的确欣赏其他基础科学领域，特

---

* 原题：Mathematics and its development in China. 译自丘成桐先生 1997 年 6 月在清华大学高等研究中心开幕式上的讲话．原载“数学译林”3，1999，194—201.

别是基础物理的进展．例如，当物理中发现一个新定律时，我们相应地改变我们的观念．但是，我们有自己的价值观，我们应该牢记这一点．

我会谈谈我对数学的看法，但请注意，许多人并不同意我的观点．我将从全局的观点来谈谈什么是数学以及如何发展数学．数学的基本特性来源于许多不同的科学部门．我们知道，科学，尤其是基础科学，像物理学，是自然的一部分，但表述物理学的基本语言是纯数学．对此已经不再有任何争议．然而应用科学，比如工程、甚至社会科学的基本工具也来自于数学．例如，当今金融市场就聘请大批的数学家．然而数学的审美观和数学的发展是相互影响着的．我们一方面要欣赏我们自身的价值，一方面要了解外界对数学的推动作用，我们必须了解数学自身的发展规律．否则数学就无法发展．相信可以把数学当作一个服务性学科来发展的想法是错误的．反过来说，应用科学提供很多重要的素材，对数学有很大的推动作用．

数学的基本内容是很复杂的．例如，数学的非常基本的部分涉及数．与科学家讨论数是否是自然界的一部分总是很有趣的．许多科学家认为自然数不是自然的一部分．数相加，$1+1=2$，是再自然不过的了，但许多物理学家不同意这个观点．

让我们谈谈几何图形．球面和直线的概念对我们来说是自然的一部分．你觉得球面的概念没有粒子的概念来得那么自然吗？但物理学家确实这么认为．这不会影响数学家们的看法，因为我们知道我们关心什么．

当我们研究几何图形和数时，我们必须研究函数关系以及许多不同类型的方程，包括代数方程、微分方程、积分方程以及差分方程．研究这些方程可以帮助理解几何图形，也是为了理解物理和工程中出现的问题．

为了理解所有这些对象，我们常常需要对称的概念．在许多情形，这些对称性以有限群、离散群或者连续群的形式出现．为了探索对称性，数学家们发展了群表示论．

数学中也包括概率论、统计学和复杂性理论，这些学科来源于社会科学、计算机科学和自然科学．来源于自然的一些对象使我们困惑，例如 Dirac 方程．它对数学影响很大，我们必须把它当作数学的一部分．

数学中的基本对象必须这样来选择：数学对象除了来自于自然和技术外，我们也研究为试图理解自然而构造的对象（这包括算子代数、四元数等）当这些对象的理论很丰富时，我们认为它本身是自然的一部分．这都是数学的基本研究对象．

空间或几何的概念就是这样一个例子．我们认为球面和 Riemann 面是自然的一部分．这些对象实际上是我们为了理解自然而造出来的，而我们认为它们是自然的一部分．我将回顾过去几百年来空间的概念是如何演化的，以论证这一观点．

当然我们知道空间是物理中的一个基本概念．数学家也是这样认为的，但空间的引进方式不同．很自然我们从直线、圆周、三角形和多边形的研究开始．因为这些对象很直观．它们是 Euclid 几何中的基本对象．经过一段很长的时间后，数学家们终于能够理解这些对象．后来又发明了微积分来理解像曲线和曲面这样更复杂的对象．它们的发展也花了很长时间．之后这方面的研究开始迅速发展．为了理解 3 维空间中的曲面，Gauss 引入了曲面的内蕴性质．曲面未必要落在 R^3 中，它们有自己内蕴的意义．这一点是由 Gauss 本人和 Riemann 注意到的．由于 Gauss 的这个伟大发现，我们命名了 Gauss 曲率这个术语．这正是现代几何的开始．现在我们可以把 3 维空间中的曲面看作一个抽象的弯曲曲面．为了理解复解析函数以及它们的定义域，Riemann 引进了 Riemann 面．这两个概念之间的关系比它们乍一看起来要密切得多．不久关于抽象流形的许多重要思想由许多几何学家在本世纪和上世纪之交发展起来了．Einstein 需要这些思想用于他的重力理论．

大约在 19 世纪后期，著名的法国数学家 Poincaré 引进了拓扑学．他研究高维流形的拓扑是为了理解动力系统的相空间．我

记得，仅仅是20年或30年前还有人问我，既然人类见到的只有2维或3维空间，数学家为什么还要研究高维空间．事实上高维流形对于理解低维空间很重要．同时对任意维数的空间分类所引起的数学工具在21世纪的数学起着很重要的功用，二维曲面由环柄的个数来分类．如果我们知道曲面环柄的个数，我们就知道这个曲面是什么样的．很自然，我们希望高维空间也能用代数不变量来描述．这样便立即引进了同调和同伦的概念．群论和环论也被引进拓扑的研究中，而拓扑方法又反过来也影响了群论和代数的发展．我们看到不同的数学分支在这里聚汇．这发生在本世纪早期，而由此引发的数学进展则数不胜数．

Morse理论是用来研究函数的临界点的．在本世纪初，在Poincaré，Birkhoff，Morse的带领下，许多人试图用拓扑来证明临界点的存在．拓扑的丰富结构制约着许多临界点的存在性．很长时间里，人们利用这种手段研究临界点．Bott和Smale把这个过程反了过来，用函数的临界点来理解流形的拓扑．Smale用这个想法解决了维数大于4时的Poincaré猜想，虽然Poincaré猜想只是一个单独的问题，而这一套想法对高维流形的理论是至关重要的．Smale引进的环柄理论已经成为拓扑中的基本工具．这里我们看见从函数论引进的想法成为理解空间的一个基本工具．

Bott和Smale研究了可以相互连续形变的那些空间．但数学家也想了解光滑空间．为了理解空间的光滑结构，我们必须考虑丛，这最早是由Whitney引进的．为了理解抽象流形，Whitney试图把流形嵌入到R^n中．为此引入了切丛的概念．他研究了切丛，而这又自然地引出法丛的概念．有了这些，就要弄清丛的一般构造．Whitney把这些当作研究浸入理论的工具．后来Hopf和其他人发现从纤维丛构造空间是很重要的．要理解所有这些概念，我们需要关键的一步：Stiefel和Whitney引进了称为Stiefel－Whitney类的代数不变量．后来Pontryagin研究了实数域上的可定向丛．陈省身则对复丛发展了一套类似的理论．结果发现这些“示性类”是非常自然而又基本的对象．示性类被用来对丛进

行分类，因此是用来分类空间的一部分数据．数学家们研究这些只因为他们想知道空间是什么．从同调结构，同伦结构，到光滑结构，最主要的工具就是代数．同时，Cartan 则研究了这些丛上的联络，并研究了这个理论的解析形式．

很早（1940 年前后）人们就认识到向量丛是代数几何中的基本工具．例如，对于 Riemann 面理论来说很基本的一个内容是 Riemann-Roch 定理．这是一个用来描述代数方程（组）解的个数的公式．在 20 世纪 40 年代末，好几个人，例如 Serre 和 Kodaira，提出了一个高维 Riemann-Roch 公式．1954 年，Hirzebruch 用丛的陈类这一语言证明了被猜测的这个 Riemann-Roch 公式是正确的．后来，Grothendick 引进了拟丛，K 理论得到了发展．这些对于用代数的方式来推广空间的概念有深远的影响．20 世纪 60 年代早期，Atiyah 和 Singer 把 Riemann-Roch 公式推广为椭圆算子的指标定理．这在分析和几何之间建立起一种至关重要的联系．

本世纪 40 年代后期，Weil 认识到用几何的方式可以很好地理解数论中的许多重要问题．因此他试图研究定义在有限域上的空间．现在空间不再是连续的，但是具有代数结构．这种空间的概念来自于以下的基本概念：一个空间上所有函数作成的空间决定了这个空间本身．数学家们认识到空间是由它上面的函数所决定的这一点是数学发展史中的一个转折点．于是我们可以通过考察代数而不是空间本身来确定这个空间的结构．沿着这个方向，可以弄清许多与数论有关的问题．空间的概念在 Grothendick 和一些人那里有了绝然不同的意义．他们这样做是为了解决 Weil 猜想．代数几何与数论中的许多重要问题在这个框架内得以解决．代数方法的一项伟大成就就是 Deligne 最终解决了 Weil 猜想．

从 19 世纪初开始直到 20 世纪 60 年代，空间概念的演化主要发生在数学的内部．唯一例外的是广义相对论和 Hodge 理论给我们带来的观念．后者是流形上的 Maxwell 理论．Hodge 理论

是几何中最有威力的工具之一. 这个理论是这样自然以至于我们都忘记了它也来自于物理学. 广义相对论告诉我们，时空可以由几何来描述，奇点在空间中会自然出现，因此我们就得研究它们.

尽管我们对维数大于 4 的光滑空间的了解已经比较清楚，但我们对奇点的了解仍然不多. 我们首先发展了光滑空间的概念是因为我们对它的了解比较清楚. 但是奇点的出现非常自然，因此我们必须理解它们. 奇点已经成为一个十分重要的课题而且或许会成为下世纪最重要的研究课题之一.

我们对由一组多项式定义的奇点的概念了解得比较好. 你可以考虑一组多项式的零点集. 有时这个集合的奇点很容易理解. 例如，曲线 $x^2=y^3$ 这一情形，它在原点有奇点. 但是对高维奇点的理解就极其困难了，对这类奇异性，Hironaka 证明了一个定理，它使我们能用光滑代数流形来把握奇点. 奇点与焦散面、振荡积分、超弦论中的空间密切相关. 在许多基本领域都出现了代数奇点，但要理解它们仍很困难.

奇异空间也自然地出现在图及单纯复形的理论中. 它们都具有许多类似于光滑空间的性质并且正在得到研究. 它们来自于组合问题，数论和群论.

我们所遇到的最难于理解的奇点来自于自然科学，特别来自于非线性方程或者由动力学变化模式所定义的奇异性. 这是因为我们对非线性方程的理解不够，多项式我们可以写下来，用手算或用计算机来研究它，但要求解非线性方程则是非常困难的. 因此，我认为，奇点是怎样产生的，如果产生了，它们的性质如何，这将是 21 世纪的基本问题.

这里大量的问题是受 Einstein 方程启发而来的. 有几个基本问题. 从一个非奇异空间演化而得的空间有什么样的性质? 黑洞是怎样产生的? 空间中除了黑洞外还有没有其他奇点? 遵从 Einstein方程的空间中奇点是从哪里来的? 它们与数学中奇点的一般结构有何关系?

到目前为止，我们还没有讨论过 3 维或 4 维空间．过去 10 年里这是一个最重要的课题．从本世纪 70 年代开始，我们研究了流形上的函数和非线性方程，我们要用这些对象来理解 3 维或 4 维空间．（拓扑学家早就知道高维空间拓扑中的经典方法不足以解决这两个维数的问题．）当维数为 3 时，考虑 Einstein 方程

$$R_{ij}-\frac{R}{2}g_{ij}=T_{ij}.$$

数学家们感兴趣的是 $g_{ij}>0$ 的情形．这比 Lorentz 的情形要容易掌握．更简单一些，取 $T_{ij}=0$．这种空间称为是 Einstein 空间，这时

$$R_{ij}=Cg_{ij},$$

其中 C 是常数．相对论学家研究这个方程已有很长时间了．数学家们立刻要问的是下面的问题：给了一个空间，什么时候它是 Einstein 空间？假如答案是肯定的，如何把它们参数化？一个非常重要的特例是 $C=0$ 的情形．当 M 是复流形时，相应问题已经得到解决．M 没有特殊结构（没有自然的方式固定规范）的情形将是 21 世纪的主要问题．当维数是 2 时，问题已得到彻底解决．对 3 维情形，这是我们要问的最令人兴奋的问题之一．我的朋友 Hamilton 将动力学引进了这个方程．它对应于物理中的重整化流．他引入重整化流只是因为它看起来很美妙．然而，他后来能证明一些漂亮的定理并应用于几何的研究．考虑定义在有度量的空间上的演化方程：

$$\frac{\mathrm{d}g_{ij}}{\mathrm{d}t}=-2R_{ij}.$$

10 年前，我建议 Hamilton 设法证明能把 3 维流形上的任何度量适当地形变为具有“Einstein 结构”的流形之和．这就要求我们能彻底地掌握演化过程中奇点的结构，在 3 维情形，Einstein 结构与常曲率流形结构相同．而常曲率流形的分类是知道的．假如我们对每一小块理解透了，我们就能完全掌握 3 维空间的拓扑．这可能是第一次有机会弄清楚非线性演化方程组的奇点结构．在

这方面我们正在取得进展.

对 4 维情形，遵循同样的途径仍然会是很有趣的，但在现阶段可能有点力不从心. 根据 Taubes 关于自对偶 Yang-Mills 方程的存在性定理，Donaldson 引进了 4 维流形上的一个新不变量. 我们已经从物理学那里知道研究 Yang-Mills 方程的自对偶解是有意义的. Donaldson 成功地把问题反了过来，他用自对偶方程的模空间来帮助理解拓扑. Seiberg 和 Witten 最近的工作是物理和几何之间又一次成功的统一. 它提供了研究 4 维拓扑的一个新工具.

空间的概念现在又遭到弦论专家的挑战. 弦论中的对偶性可能要求有新的空间的概念才能解释. 我们不知道这样的概念究竟该是什么样的，许多人都在研究这个问题. 同时，它也涉及到研究时空的奇异结构.

从上面的历史中我们可以吸取很多教训. 首先，中国数学家会发现要想涉足不同的研究领域似乎特别困难. 历史告诉我们，数学上的伟大成就大部分是得益于理解某一特殊的课题. 所用工具则来自于不同的领域，比如力学、广义相对论、数论以及非线性方程. 当它们被结合起来解决特别的自然问题时，它们就变得更重要了. 第二，在上述过程中，产生了许多新概念. 其中有些概念变得非常重要甚至导致新学科的诞生，而另一些就消失了，因为它们对我们理解自然没有任何贡献. 第三，在许多方面，数学的发展与物理学类似. 我们要做实验. 我们向物理学和技术科学学习. 我们用手或计算机做许多计算. 我们也会做许多现象学的研究，我们会提出许多猜想. 许多猜想的提出是试图知道正确的方向是什么样的. 我很少见到中国数学家提出比较有意义的猜想，数学的一般理论需要大量的现象学研究. 我们不能只解决别人提出的问题. 我们必须创设我们自己的问题. 只有这样我们才能发展出一般理论. 我们应该明白什么是有用的理论，有用的理论必须能用于理解现象学的研究. 当我们发展一个一般理论时，我们不是为了服务于其他学科，而是基于它自身的美以及达到和

谐统一的愿望.

下面我用中文就中国数学家的问题说几句.

我们要谈中国数学的未来发展，先看一下我们的过去，我们中国人习惯上讲自己很了不起，事实上，中国古代数学主要贡献在计算及其实用化，我们算圆周率算得位数很高，但是对数学理论没有系统化的研究，基本上抗拒几何学的逻辑结构和发展抽象代数. 在我看来，它们在中国从来没有生过根. 我们对传统的科学有不合理的热爱，结果不能接受新的观念，也不能对应用数学作出贡献. 虽然我们对应用数学有疯狂的热情，由于我们不愿意学习基本的、有系统化的数学理论，结果对应用数学也不能做出伟大的贡献.

中国近代数学能超越西方或与之并驾齐驱的主要有三个，当然我不是说其他工作不存在，主要是讲能够在数学历史上很出名的有三个：一个是陈省身教授在示性类（characteristic class）方面的工作；一个是华罗庚在多复变函数方面的工作；一个是冯康在有限元计算方面的工作. 我为什么单讲华先生在多复变函数方面的工作，这是我个人的偏见. 华先生在数论方面的贡献是大的，可是华先生在数论方面的工作不能左右全世界在数论方面的发展，他在这方面的工作基本上是从外面引进来的观点和方法. 可是他在多复变函数方面的贡献比西方至少早了 10 年，海外的数学家都很尊重华先生在这方面的成就. 所以，我们一定要找自己的方向，我想这是一个很重要的看法. 我们要从数学的根本上找研究方向，我们近 20 年来基本上跟随外国的潮流. 我们没有把基本的想法搞清楚，所以始终达不到当年陈先生、华先生或冯先生他们的工作. 我想我们一定要找自己的方向，可是我们在很多方面的知识还是很缺乏. 我们一定要在了解了其他方面的发展后才能发展自己的方向. 所以一方面要发展自己的方向，一方面要了解其他方向的发展. 我下面举个例子.

分析方面我以为非线性微分方程是主要方向，可是为了研究非线性方程，线性方程和古典的调和分析基础一定要打好. 当然

特殊函数、傅里叶分析（special function，Fourier analysis）都是主要工具．可是非线性方程不宜作太一般的研究，一定要与微分几何、物理学以及其他自然科学相结合，由大自然指导我们研究．双典型方程无论线性、非线性都值得发展，我们要发展自己的特色．中国这 10 多年在守恒定律（conservation law）、空气动力学（gas dynamics）方面有一定的成就，可是在高维空间［即空间维数（space dim$\geqslant$2）］没有贡献．这方面我觉得是重要的，不仅中国没有贡献，而且全世界也没有贡献．从数学分析上讲，高维空间的动力系统很明显与几何有密切联系，因为维数大了的话，有几何的意义在里面，当然张量分析是研究高维空间的重要工具．椭圆型方程的奇异点问题也值得深入研究．

离散化的动力系统和离散组合数学在应用科学方法起着很大的作用，它们的发展应该与上述的非线性方程理论平行发展．近代自动化系统的研究和金融数学都有很值得研究的随机性方程．

从基本粒子方程推导流体力学方程是很有意义的一门学问，流体力学中的奇异点问题和湍流的研究将是未来一个很具挑战性的数学问题．

几何方面我们其实有很多方面可以作研究的，如：爱因斯坦方程的深入研究，极小化流形、规范场等．几何研究方面的重要突破需要深人的存在性定理．三维空间和四维空间的深入理论和方程的存在性理论有密切的关系．同时古典中的刚性问题、嵌入问题，曲面的构造问题都与工程学息息相关，很值得研究．

代数方面以代数几何、数论为主．Hodge 猜测是主要的研究对象，其与矢量丛（vector bundle）的关系也值得研究．另外，由弦（string）理论引起的代数和数论问题也值得研究，统一场论将会作成数学的大一统，很值得注意．

数论方面以 Langlands 理论和算术几何（arithmetic geometry）为主要方向．

最后，我再讲几句话．我前面讲的主要与物理有关，其实，实际工作中很多问题跟我们纯数学有很大关系．举个例子讲，我

最近遇见几个曾是清华大学的学生，他们现在在哈佛念工程专业. 他们跑来和我谈计算几何方面的问题，如把图像运动表示出来等. 我发现这些学生由于念工程的缘故，在微分几何方面完全没有得到培训，其实主要问题都是古典的几何问题. 工程的学生没有得到基本的训练，他们对很多问题没有办法了解，这是一个不幸的情景. 在本科时应该让他们把一些基本课程练好，很明显这和以后有关. 作一个图形表示问题很明显和古典微分几何有关，可是没有学好. 所以，我希望学工程的人花一点时间在纯数学上去，我想打破门户之见是目前最重要的问题.

在这次演讲会中，Esaki 教授说到，做基础研究的人愿意做"没有预见到的研究". 因此预言会发生什么事是不明智的. 相反我回顾了我们曾有过的过失，我希望我们能从历史中吸取教训. 我确信许多中国数学家将在未来的 10 年里成为一流的数学家.

附 录 Ⅱ

华 罗 庚 传

斯梯芬·萨拉夫*

Ⅰ. 导言

“他的工作范围之广阔，使他堪称世界名列前茅的数学家之一”（Lowell Schoenfeld, “A Biographical Note on Professor Loo-Keng Hua”, Notices of AMS, 7, 1959, 729—730. 关于 AMS 的会员名单，见 Combined Membership List, 1971—1972, Providence, R. I., AMS. 1971）. 这是发表于《美国数学会通讯》上的中华人民共和国唯一的美国数学会会员华罗庚传的结论. 1910 年，华罗庚出生于江苏省（数学家华罗庚，上海人民出版社，1956, 5），他的研究工作很大地丰富了数学的文库——在 1939 至 1965 年之间，他所发表的书与论文被《数学评论》(Mathematical Reviews) 评述过 105 次. 1950 年，他从美国回北京后，即活跃于中国的数学界. 回国前，他在高等研究院与 Illinois 大学工作了三年之久. 由于他突出的数学成就，在他还不到 40 岁的时候，他就已经成为发展中国高等教育不可或缺的人才了. 虽然在国外数学家以外的人士中，人们并不熟悉他，但他的名字在中国大陆的文学作品中，一直被作为骄傲而描写着. 为了

---

* 见 Stephen Salaff, A Biography of Hua Loo-keng, Sci and Tech in East Asia, Sivin Nathan Edited, Watson Acad, Pull. Inc; 1977, 作者感谢普林斯顿高等研究院丘成桐教授的帮助与 Toronto 大学 Choi Man-duen 博士对华罗庚的书与论文的翻译. 王元、杨德庄译.

了解中国近代数学的贡献及近代科学的发展，人们必需熟悉华罗庚的一生．本传记将着重讲述华罗庚的学术贡献及他多才多艺的数学风格．

在研究他传奇式的经历时，我们发现华罗庚的学术作用与他的政治作用是分不开的．我们将以此来观察从30年代开始，他的活动的复杂性与矛盾性．在共产党领导时期，他所经历的最突出的事件是所谓的无产阶级文化大革命．1966—1969年之间，他受到了红卫兵严厉的政治批判．1969年6月，《人民日报》发表了他的一篇署名的自我检讨文章之后，他的政治声誉（虽然不是他的数学研究生涯）得到了保留，甚至于得到了提高．他表示了“全心全意地赞扬毛主席的高等教育与知识分子的改造路线”，赞成1966年停顿的大学，要与工厂相结合．在中国，《人民日报》的文章是长期政治准备的结果．“典型”形象则是为了政治运动的目的而树立的．华罗庚从而成为“改造好的知识分子”的一个代表了．为了了解文化大革命对科学与教育的影响，我们要特别分析一下华罗庚的最近表现，这将在下面第Ⅳ中来讨论．

在这里，我们是用数学语言来讨论华罗庚的著作的，所以数学家读这篇传记的时候，自然会很方便的．但作者的心里是放着其他读者的．我认为非专业的读者只要将讲述专业之处跳过去，就可以阅读下去了．

Ⅰ.1910—1950

华罗庚毕业于他的家乡江苏省金坛县立初中（相当于中学的前两年），然后进入上海中华职业学校，完成了两年制专业的前一年半的课程．迫于家境贫寒，在他15岁的时候就辍学回家乡金坛县，协助他父亲经营他的家庭小店．华罗庚的父亲对他的儿子专心于学习很不高兴．关于华罗庚的一个通俗传记上登载了一幅漫画：他父亲穿过店堂追赶他的儿子，小男孩恐惧地抓紧胸前的几本数学书，父亲威胁地要把他的书烧掉．画面上还有一张华罗庚帮助他父亲算帐用的小桌子，桌子上还放着一个算盘．

如同绝大多数数学家一样，华罗庚在很年轻的时候就显露出他的数学才华了．他开始自学现代数学．当他 19 岁的时候，他就在上海《科学》杂志上发表论文并引起了注意．同一年，华罗庚患了致命的伤寒病，接着又患了关节炎，使他的左腿终生受了残疾．但他忍住了病痛及以后在战争年代中的艰苦．华罗庚的著作受到了北平清华大学算学系主任熊庆来的注意，并企图提拔与安排上海的这篇文章的作者．起初清华大学算学系的教师与“留学生协会”中都没有人知道华罗庚这个人，后来，一个江苏省籍的教师告诉熊庆来：华罗庚不是大学毕业生，甚至不是高中毕业生，只是小村镇中的一个会计．为了“发现”华罗庚，熊庆来不顾这些困难，亲自邀请他来北平工作．华罗庚是 1931 年夏到达清华大学的，他只能在算学系担任“助理”职务．由于没有文凭，他只可能获得这样一个小职员工作．但不久之后，他即被晋升为教员（相当于助理教授）（关于熊庆来发现华罗庚的过程，取材于 Ying Tzu：“中国数学家人物志”香港启明出版社，1956，31—37）．华罗庚最初的兴趣是数论，他在这里得到杨武之的鼓励与支持．杨武之是在 Leonard Dickson 指导之下研究堆垒数论中的 Waring 问题并获得博士学位的．早在 30 年代，陈省身就是华罗庚在清华大学的同事之一，后来成为著名的几何学家．陈省身于 1934 年获得清华大学硕士学位，1936 年获得 Hamburg 大学博士学位，现在是位于 Berkeley 的加州大学教授．

华罗庚与陈省身被看作是当今中国的领袖数学家．为了达到这一水平，他们都离开中国出国留学了．中国数学的简史说明了为什么那时有能力的中国年轻数学家都要出国去．1300 年以前，中国数学家作出过许多突出的成就，以下是其中熟知的：二项式系数的 Pascal 三角，多项式的近似求根法（即所谓的 Horner 方法），求解联立四次方程组的技术，与求解联立同余式组的“中国剩余定理”．但到了明朝（1368—1644 年），进展就停滞了，那时创造性的思维中止了，甚至连解四次方程的方法也被遗忘了（Joseph Needham，Science and Civilisation in China，vol Ⅲ．

Camb. Univ. Press, 1959, 153—154). 然后至17世纪, 天主教传道士发现如果他们将欧洲的点滴数学与天文学的例子告诉清朝皇帝的时候, 他们就能够得到好的印象. 中国的数学家开始慢慢地发现已经被他们长久遗忘掉的过去, 而且他们将这些与可能从传教士那里得到的图书中有限的欧洲数学知识结合起来. 在19世纪与20世纪初, 中国数学家在这一范围内尽心尽力地工作, 得到了一些漂亮的公式——组合数, 幻方, 同余式与其他算术的主题. 他们的结果只涉及到计算及严格的有限技巧, 但不涉及近代分析的复杂极限过程与抽象的代数结构, 这些工作是由Lagrange与Gauss这样的人研究出来的; 他们综合了现有的学科和定向与完整的数学知识创造出来的高水平的理论. 闭塞与孤立的中国与日本不同, 她缺乏引进西方科学知识的原动力. 因此一直到1900年, 中国的数学基本上是停滞的.

到20世纪, 中国数学家才开始吸收西方的数学, 并且在继承的基础上, 添加了他们自己的贡献. 由于中国几乎没有学位制度, 一些优秀的中国学生早期仅去日本, 后来才去欧洲和美国, 进入那里的大学学习, 他们开始发表论文了, 到1928年左右, 论文的数目就大大地增加了. 最初的工作领域是数论与"硬"分析(如Fourier级数).

25岁的华罗庚抓住了一个提供给他的与数学思想的中心相接触的机会. 1936年夏, 他受中华文化基金会的资助, 到达剑桥大学, 这个基金会是由1900年义和团事件后, 清政府对西方八个国家所付的大量赔款(庚子赔款)中返还的部分钱而建立起来的. 实际上, 由美国传教士建立起来的清华大学只是作为向美国派遣留学生的预备学校. 这所学校从1911年开办时起至1946年共派遣了一千多名学生去美国(A Survey of Chinese Students in American Universities and Colleges in the Past 100 Years, China Institute, New York, 1954). 在30年代, 庚子赔款亦资助了几百名中国学生去了英国.

华罗庚在英国参加到了一个优秀的数论集体之中, 其中包括

英国人 Harold Davenport，G. H. Hardy，J. E. Littlewood 与 E. M. Wright 及德国移民者 T. Estermann 与 Hans Heilbronn. 这时期，华罗庚的绝大多数文章都是论述堆垒数论问题的. 堆垒数论为研究将正整数分拆成某种其他整数之和的问题. 这一领域中研究得最彻底的 Waring 问题是要将正整数分拆成为正整数的同次方幂之和. 因此这一问题即对于每一个给予的整数 k，要寻求最小的整数 s，它称为$g(k)$，使方程

$$n = x_1^k + \cdots + x_s^k \tag{1}$$

对每一个正整数 n 均有解.

在 Edward Waring 提出这个问题一个世纪之后的 1909 年，David Hilbert 证明了对于每个 k，这样一个最小的$g(k)$的确是存在的，但他的证明方法是归纳性的，而不是构造性的，因此不能由此得到一个 $g(k)$明确的上界. 除了 Hilbert 之外，还有很多杰出的数学家致力于 $g(k)$的估计问题. 例如已知的结果有 $g(2)=4$(Lagrange, 1770)与 $g(3)=9$(Dickson, 1939)，即每一个正整数皆可以表示为 4 个平方之和或 9 个立方之和，其中“4”与“9”均不能换成更小的数. 尽管人们相信，除了有限多个正整数 k 之外，均应该有 $g(k)=2^k+A-2$，其中 A 为不超过$(3/2)^k$ 的最大整数. 但对于所有的 k，寻求$g(k)$明确的表达式的企图仍然未能成功.

因为相对小的整数可以偶然有特殊的表示，这在某种程度上隐含了本质的结果. 命 $G(k)$表示最小的整数 s，使除了有限多个 n 之外，(1)式均有解. 在估计 $G(k)$方面，人们亦做了很多努力，已知 $G(2)=4$，$4\leqslant G(3)\leqslant 7$ 及 $G(4)=16$. Davenport 于 1942 年证明了 $G(5)\leqslant 23$ 与 $G(6)\leqslant 36$. 但当 $k\geqslant 5$ 时，亦尚未发现 $G(k)$ 明确的表达式.

Goldbach 问题是一个与 Waring 问题相关的著名问题，其中在 (1) 式中 $k=1$ 及 $s=2$ 或 3 及诸 x_i 要求取素数. Goldbach 问题可以叙述为：“给予任何偶数 n，能否找到素数 x_1 与 x_2 使 $n=x_1+x_2$?” 及对于 $s=3$，“给予任何奇数 n，能否找到素数 x_1，x_2，x_3，使 $n=x_1+x_2+x_3$?”

华罗庚在 Waring 问题与 Goldbach 问题方面的结果与他的欧洲同行的结果是相辅相成的．在 20 年代，Hardy 与 Littlewood 发表了一系列论文，他们用新的分析技术去处理 Waring 问题并证明了$g(k)=O(k2^k+1)$*，他们还给出了当 $x_1\geqslant 0,\cdots,x_s\geqslant 0$ 时，方程(1)的整数解数 $r_{k,s}(n)$ 的渐近公式，即他们给出了 $r_{k,s}(n)$的一个关于 k,s,n 的表达式加上一个误差项 $0(n^{-1+s/k})$（当 $n\to\infty$）；他们的结果仅对于大的 s 是有效的．华罗庚关于 Waring 问题（Loo-keng Hua，"On Waring's Problem"，Quarterly Journal of Mathematics，9，1938，199—202）最好的结果为用圆法的框架证明了 Hardy 与 Littlewood 的公式对于 $s\geqslant 2^k+1$ 成立，华罗庚定理的证明依赖于一条困难的引理，即需要估计形为

$$\int_0^1 |f(t)|^{2^j}\mathrm{d}t \tag{2}$$

的重要的三角和积分，此处 $1\leqslant j\leqslant k$ 及 f 为某种三角和．华罗庚的工作是导出 $G(k)$ 的估计的逻辑链条中的关键一环．Davenport 写道：华罗庚关于三角和积分（2）的"非常有效"的界使他能够得出关于 $G(5)$ 与 $G(6)$ 的精密不等式（Harold Davenport，Analytic Metods for Diophantine Equations and Diophantine Inequalities，Ann Arbor publ；1963，p．65）．在 Davenport 之前，$G(5)$ 的最佳估计式 $G(5)\leqslant 28$ 是华罗庚于 1939 年得到的．（"On Waring's Problem for Fifth Powers"，Proc．London Math．Soc；1939．144—160）．

在英国数学家工作的基础上，苏联数学家 Ivan M. Vinogradov 独立地建立了不等式 $G(k)\leqslant k(6\log k+4+\log 216)$ 达到了数论的一个高峰．更使世界数学界震惊的是他用三角和的估计证明了，每个充分大的奇数都可以表示为三个素数之和，从而本质上解决了关于奇数的 Goldbach 问题．

在详细讲述华罗庚的下一个阶段的经历时，请勿弄错这样一

* 应为$G(k)=O(k2^k)$．——译者注

个事实，即这位自学成才与善于独立思考的人虽然已经通过了每一个“学术”要求，但他并没有正式注册为剑桥大学的研究生，更从未得到过博士学位．他只是住在小镇上，每天到大学去研究数学．看来他可以将给他的庚子赔款的钱作任意使用的．尽管上面讲的事情在数学家中已经是众所周知的．但一些传记作者固执于传统观念，仍然坚持说华罗庚曾被授予过博士学位（误以为华罗庚被授予过数学博士的文章有：Chu-yuan Cheng，Scientific and Engineering Manpower in Communist China，1949—1963，Washington：National Science Foundation，1963，p. 449；Wolfang Barche，Chinaköpfe，Hannover：Verlag für Li Lesatur und Zeitgeschehen，1966，p. 159；William Ryan and Sam Summerlin，The China cloud，Boston：Little Brown，1967，p. 307）．

华罗庚两次回中国并再次出国

1937年夏，全面爆发了日本的侵华战争．清华大学、北京大学与燕京大学一起逃亡到中国西南的云南省首府昆明市*．这些学校的图书馆与实验室都丢弃给了日本侵略者，当他们抵达内地时，带来的图书与设备，绝大部分已在路途中受损或遗失而所剩无几了．在昆明，这三所大学联合重建为西南联合大学．适逢华罗庚从剑桥大学回国．1938至1945年间，他担任该校的教授．战争年代的标志是物资匮乏与学术条件低劣（Yin Tzu《中国数学家人物志》第34页中有一个认为是华罗庚的传说：当我在西南联大时，有一个关于乞丐的故事，有一个乞丐，他在街上遇到了一个行人，乞丐跟着这个人要钱．他告诉乞丐自己没有钱，但乞丐不相信，一直跟着他走到了另一条街．这人转身来告诉乞丐说：“我是一个教授”．于是乞丐走开了．因为乞丐也知道在教授的口袋里的确是没有钱的）．但这些年来，华罗庚仍然发表了20篇研究论文．1941年，他完成了他的第一本专著《堆垒素数论》手稿，这本书处理了Waring问题与Goldbach问题及与

---

* 应为清华大学，北京大学与南开大学．——译者注

之有关的一些问题．他将过去文章中的结果作了统一地处理与改进．华罗庚将这一手稿投交给了于1941年建立的中央研究院数学研究所审查．该研究所受困于战时困难条件且管理混乱，尽管华罗庚得到了教育部为此专著颁发的奖金（China Handbook, New York: Rockport Press, 1950, p. 753）．但手稿却不幸地未能在此时发表（以后，华罗庚还要对这件事作些解释，见第Ⅲ章）．

战后，华罗庚开始了他的国际生涯中的另一篇章——他与苏联数学家有紧密的个人关系．1945年下半年，应苏联科学院的邀请，他去苏联作了访问．华罗庚与Vinogradov从30年代起即开始通信．他们对三角和方法的发展极大地改变了解析数论的中心主题．他们的工作对从20年代开始，在这方面所得到结果的本质部分，作出了统一地处理，并将它们用于数论的不同领域中去．从下面的事情中可以看出华罗庚的贡献：苏联科学院宣布成果的主要杂志《科学记录》(Doklady) 是很少登载外国人的论文的，但从1937至1941年，每年都要发表华罗庚的一篇论文．1945年，在他去苏联之前，他已向苏联投稿了“堆垒素数论”的英文手稿．当华罗庚了解到Vinogradov已在1942年改进了他的方法，他立即在他的手稿上写明了这些改进．这篇手稿是被译成俄文并作为“Steklov数学研究所专著”的第22号于1947年出版的（Trudy Matematiceskovo Instituta im V. A. Steklova, Moscow/Leningrad, vol. 22, 1947）．他的一些结果已被认为是经典的结果．在这本Steklov研究所的专著中，华罗庚建立了Waring问题解数的渐近公式．他的主要结果要更加广泛一些，是关于方程

$$n = f(p_1) + \cdots + f(p_s)$$

解数的渐近性质，此处 f 为一个有适当性质的 k 次整值多项式，这推广了仅处理 $f(x) = x^k$ 的Waring问题（译者注：上面方程中的变数还限制为仅取素数值）．除了Dickson的工作外，关于多项式为被加项的Waring问题的文献中，华罗庚的文章比任

何其他作者的文章都要多些（W. J. Ellison, Waring's Problem, Amer, Math, Mont; 1, 1971, 10—36）.

苏联科学院早就承认了华罗庚及他的研究成果. 1946 年 4 月，华罗庚在他的《堆垒素数论》出色的序言里写有下面的话：

"无论著者如何地感谢 Vinogradov 院士都不会是过份的. ……，最后，著者对苏联科学院对他的著作的好评价愿表示深切的谢意. 在这些困难的日子里，我们的科学的研究的成果能获得最友好的人民的最高权威方面的赞助，这特别给予我们很大的鼓舞. ……，谨祝此书的出版将会加强我们两伟大人民间的真诚友谊与相互亲善".

1946 年上半年，华罗庚从苏联回到了中央研究院所在地昆明. 但华罗庚在研究所里工作不久，即接受高等研究院的邀请于同年秋天赴美国. 华罗庚是以中国赴美物理科学家团体中一员的身份赴美国的. 其他成员包括核物理学家吴大猷，他也是以庚子赔款赴美国留学并于 1933 年获得 Michigan 大学博士学位的. 还有有机化学家曾昭抡（第二次世界大战以后，曾昭抡是北京大学化学系教授与系主任. 他是 1948 年被选为中央研究院院士的 81 个出色的中国科学家之一；见 China Handbook，第 753 页）. 他是 M. I. T. 的化学工程博士；还有以后曾由于宇称不守恒的工作而分享了诺贝尔物理学奖的李政道，他是这个团体中最年轻的成员之一.

在以后出版的曾昭抡与华罗庚的传记中说，1946 年，国民党欲通过他们的科学家来了解美国的原子能计划. 因此由"新中国人物志"提供的材料说，曾昭抡是国民党政府派去英国学习原子能的，然后再去美国，并于 1947 年返回香港（新中国人物志，卷Ⅱ，香港 Chou Mo Pao She 出版社，1950，第 100 页）. 根据最近出版的"中国人名系"登载；抗日战争后，曾昭抡由政府派遣到美国学习原子能，并于 1947 年被召唤回国.（中国人物志，台北，国际关系研究所，1967，第 496 页）. 1956 年出版的，由中国共产党人撰写的华罗庚传中，也讲述了华罗庚与国民党国防

部的关系："国民党说他们派遣华罗庚去美国研究'国防数学'及原子弹的构造". 根据这些材料及我本人对这个时期的研究，我的意见是蒋介石的确指令华罗庚与其他几位优秀科学家去美国搜集美国原子能计划的信息的.

但1946年的情况是复杂的. 共产党作家表示了华罗庚去美国的不同理由——闻一多被暗杀. 在20年代与30年代，闻一多是中国的领袖诗人与古典文学家. 抗日战争期间在西南联大任教授. "是华罗庚的亲密同事并深受华罗庚的尊敬"（见人民中国，1953年12月）. 日本的侵略使闻一多政治化了，他成为中国民主同盟的活跃分子及其云南省宣传部门的负责人（Howard Boorman, Biographical Dictionary of Republican China, vol. Ⅲ, Columbia Univ. Press, New York, 1970. 410—411. 作者说："这一时期，闻一多的办公室里经常地挤满了左倾与有自由思想的学生与教授".）1946年7月15日，在他的一个民主同盟同事被暗杀的追悼会上，闻一多教授作完了演讲之后被暗杀的. 他在演讲中严厉地谴责了国民党特务的暗杀活动. 闻一多是被国民党特务暗杀的. （或 Israel Epstein, The Unfinished Revolution in China, Boston: Little Brown, 1949, p. 388. 美国给蒋介石271艘船的供给，其中有无声手枪等设备. 由海军开发的无声手枪是令人凄惨的. 蒋介石的秘密警察用它杀害了由美国培养出来的有自由思想的知识分子、民主同盟的领袖人物闻一多与李公朴. Epstein 在这里提到了李公朴. 闻一多是在李公朴的葬礼上作演说的）. 官方的结论是："在这种情况下，1946年夏，华罗庚一家去了美国".

"原子能任务"至少是很特异的. 蒋介石相信，或有这样的印象，即中国优秀的科学家是能够得到原子能的计划的. 但1946年4月，美国国会通过的麦克马洪（McMahon）条例规定，包括其最亲密的同盟国英国在内，禁止共享原子能秘密. 一些参加过原子弹工作的普通科学家已转去 Princeton 工作了. 很难设想他们愿意或可能将任何关键的信息告诉一个他们以前从未遇到

过的人们，其中一个人在去冬还在莫斯科．除了蒋介石在政治上的傲慢与（或）天真之外，自然还必需加上制造原子弹的工艺困难及中国的薄弱与管理混乱，使这件事在实际上是全无可能的．美国是未受战争破坏的唯一的科学大国，对于华罗庚来说，他希望能够在美国尽量扩大他的研究机会．这种希望可以使他对其“任务”的不安达到平衡．他也可能有这样的想法，即他根本就不去接触原子能问题．当华罗庚与其他人到达美国后，他们就各自分散到学术界中去了．1947 年，物理学家吴大猷成了 Michigan 大学的访问教授（他在以后出任过加拿大国家研究会议理论物理组的组长，现任位于 Buffalo 的纽约州立大学物理系教授），曾昭抡于 1947 年去香港后，即作为一个科学家与中国民主同盟常务委员的身份在那里从事活动．（他在解放以后是作为一个科学行政官员出现的）．（新中国人物志，卷Ⅱ，p. 157）华罗庚在高等研究院工作了两年之后，即应聘成为 Illinois 大学教授．他在 Princeton 期间，曾到位于 Baltimore 的 Johns Hopkins 医院接受了外科手术治疗腿疾，从而他的左腿疾病得到了部分地缓解．因此国防部的“任务”也就不了了之了．

这些年来，认识华罗庚的美国数学家都对他的清楚而直接的数学方法，知识的深度与他的天才，怀有深深的印象．他的兴趣很广，包括多个复变数函数论、自守函数与矩阵几何学．活跃的数学家们对于华罗庚的重要而又范围很广的贡献都很熟悉，因为他们经常不断地在引用华罗庚的结果．我对微分几何学家、代数学家与数论学家提起华罗庚这个名字，所有的人都立刻明白了．当一个群论学家听到我重复这个中国名字时，他说：“我们有一个关于同构的定理，叫做“华氏定理”，那必定是同样一个华”，这个结果已经写进了 E. Artin 的书《几何的代数》之中：

华罗庚发现了一个美丽的定理并有一个精致的几何的应用：若 σ 为一个由域 k 至某域 F 的映射，它满足下面的条件：

(1) 关于加法，σ 是同态，

(2) 当 $a\neq 0$ 时有 $\sigma(a^{-1})=\sigma(a)^{-1}$，即 σ 将一个元素的

逆元素映至该元素的像之逆，

(3) $\sigma(1)=1$，

则 σ 为 k 至 F 的同构或反自同构.（E. Artin, Geometrie Algebra, New York, Inter Science, 1957, p. 37）. 证明是一系列域的运算的推论，这些运算基于一个与 σ 的性质有关的初等的但高屋建瓴的恒等式之上.

它的几何应用为用于射影几何的基础，此处 σ 为一个 Desarguian 平面上的一条直线至其自身的一一映射. 它将任何 4 个调和点列 A, B, C, D 映为调和点列 A', B', C', D'. 首先假定 $\sigma(0)=0$ 及 $\sigma(1)=1$. 考虑其中有一个点为无穷远点的调和点列. 则可以证明 $\sigma(a+b)=\sigma(a)+\sigma(b)$，即 σ 是一个加法同构. 然后取 $a=-1$, $b=1$ 及 $c\neq 0$, 1, -1，则得 $d=c^{-1}$，所以像 -1, 1, $\sigma(c)$, $\sigma(c^{-1})$ 为调和点列. 这证明了 $\sigma(c^{-1})=\sigma(c)^{-1}$. 由华氏定理可知 σ 是域的自同构或反自同构. 对于 $\sigma(0)$ 或 $\sigma(1)=1$ 不成立的一般情况，则可以计算 $\sigma(x)=ax^{\tau}+b$，此处 $a\neq 0$ 及 τ 为自同构或反自同构.

华罗庚的直接代数方法的天才运用，使他能给“Cartan-Brauer-华氏定理一个直接证明，即体的每一个真正规子体均包含在其中心之中”（Some Properties of a Sfield, Proc. of Nat. Acad. Sci., 1949, 533—537）. 在华罗庚与 Richard Brauer 之前，Cartan 的证明用了子域的 Galois 扩张的复杂技巧. Cartan-Brauer-华氏定理是用来研究正规子域上域的同线性（collineation），一般地，它可以给出域的乘法群的正规子群的信息.

一个了解华罗庚的数学家——Berkeley 的数论学家 Derrick Lehmer 告诉我：

“华罗庚有抓住别人最好的工作的不可思议的能力，并能准确地指出这些结果中可以改进的地方. 他有许多自己的技巧，他广泛阅读并掌握了 20 世纪数论的制高点，他的主要兴趣是改进整个领域，他试图推广他遇到的每一个结果. 在某些方面，他的工作很像 I. Schur，甚至 Nobert Wiener，他们二人都对数论作

出过深刻的贡献，同时也将研究拓广到其他领域”（与 Derrick Lehmer 的个人谈话，Berkley，1970）.

Lehmer 还指出，像华罗庚与 Schur 这样的“全才”的新的兴趣都是从他们过去的领域中引发出来的. 例如，用某种幂级数的系数给出的数论方程的解数估计，事实上就可以想象为华罗庚从解析数论到复分析所架起的桥梁.

由下面的例子可以看出华罗庚是如何有兴趣地钻研数学文献的：1928 年，欧洲有两个最伟大的代数学家 O. Schreier 与 B. L. van der Waerden 决定了可交换域上的么模射影群 $PSL_n(K)$ $(n\geqslant 2)$ 的自同构，但在 $n=2$ 时的证明中有错. 20 年后，华罗庚改正了它，而且优雅地称这个错仅为“欠妥之处”. (On the Automorphisms of the Symplectic Group over any field, Ann. of Math, 1948, 739—759，或见 Jean Dieudonne. La Geometrie des groupes classiques, 2nd Edition, Springer, 1963, p. 96.)

华罗庚与钱学森回归祖国

在战后的年代里，华罗庚是在美国工作的许多杰出科学家中的一个. 1946 年有这样一个回归的团体，包括空气动力学家钱学森，一个上海交通大学的毕业生（交通大学是仅次于清华大学与圣约翰（St. Johns）大学，派遣留美学生最多的大学），钱学森也得到了庚子赔款的资助. 他于 1939 年获得了加州工学院的博士学位. 在那里，他跟 Theodor von Karman 做研究. 钱学森在战时的航空机构中被提升得很快. 1949 年，他出任加州工学院以 Goddard 教授命名的喷射推进力（jet propulsion）中心主任. 1950 年 8 月，朝鲜战争爆发后，钱学森决定回国. 但他与他个人的先期启运的八箱书与论文均被迫拘留在 Hanolulu 了. FBI 及海关人员拿走了他的科学论文. 热心的官员甚至没收了他们以为是密码的他的对数表. 但后来美国政府承认在这八箱行李中并无“秘密材料”（New York Times, Sept. 13, 1955）. 当移民局听说钱学森被拘捕后，Los Angeles 警察局的“红队”（red guard）中的两个退休官员指控钱学森于 1939 年参加了美国共产党

(New York Times, Nov. 16, 1950). 钱学森被迫滞留在 Los Angeles 市达五年之久，作为日内瓦（Gineva）中美政府级谈判的一项成果，钱学森被允许于 1955 年 9 月回归中国. 最近有一本书，神秘地叙述了钱学森 1955 年回国的历程，说他带回了大量的机密情报，足以使中国的核导弹计划整整提前 10 年，并在这次行动中，将钱学森与华罗庚的名字联在了一起.（Ryan and Summerlin, China Cloud, Subtitled American's Tragic Blunder and China's Rise to Nucleor Power，其中有明显错误的猜谜似的描写：例如第 78 页中写的华罗庚混淆的经历："华罗庚以庚子赔款到柏林大学学习，从而开始了他的科学生涯，然后转到英国的剑桥大学，再从英国到美国，在 Illinois 停留了四年". 中国核计划的研究是保密的，实际上是很难于了解的. 已知只有一个中国领导人蒋介石于 1946 年曾积极宣称过，要到美国去搜集原子能情报）. 钱学森无疑是超音速流世界领袖级的专家之一，他实际上是一个应用数学家，而且他的兴趣在极端理论方面. 作为中国研究工作的领导人与计划的组织者，钱学森的确对中国的导弹计划作了强有力的领导. 但是作为纯粹数学家的华罗庚是不会去了解美国的"秘密"的.（关于钱学森从美国机密地回归中国的传说，我曾作过争辩. 我的观点是基于 1970 年与 California 大学（Berkley）的航空科学教授 Edmund G. Laitone 的几次谈话中形成的：在钱学森作为 Goddard 教授时，Laitone 就认得他了，并且很熟悉他的技术工作. Laitone 说："钱学森对硬件完全没有兴趣，许多工程方面的细节，例如他不了解低温与高温气体及低温流体. 我可以说他甚至可能不了解焊接与覆获接合的差别." 这一说法并非贬低钱学森的数学成就，只是指出他作为一个工程师的缺点而已. 在 Boorman 的钱学森传（见第 225 页）中，作者强调了钱学森在制订"美国长远航空计划"时的作用，计划也包括导弹武器及"星际飞行的核裂变与聚变的理论可能性". 钱学森关心的仍然是"原始概念"，而"他对通常的工程问题是很少兴趣（或耐心）的"（第 315 页）.

华罗庚和钱学森是散布在各地的那些决定回到中华人民共和国的中国知识分子中的两个．他们中间的活动分子组成了回国学生和教师小组，其他对政治较不感兴趣者，亦为中国终于有了一个真正的政府，它能终止毁灭性的混乱与通货膨胀，并能终于统一了国家而高兴．而且，如同我从一些有思想的青年数学家那里了解到，如果不是全部的话，绝大多数在国外的中国学者都饱尝了孤独，而且对他们国家的新生与成长怀有强烈的感情．除了这些一般的原因之外，还应该加上这样的原因：许多中国人关心美国的麦卡锡主义（Mc-Carthyism）将会继续威胁他们，及他们能否愉快地工作或者是生活在受迫害与恐惧之中．在 Illinois 的最后一年里，华罗庚成为学生回归运动中的积极分子．作为一群中国学生的领头人，华罗庚于 1950 年 2 月乘船去了香港．在回国的旅途中，他写了一封公开信给留美的中国学生，鼓励他们学习他的榜样．

为了写这篇传记，1970 年，我曾跟一些在美国工作的数学家交谈过，他们说，华罗庚回国后，在不间断的政治运动中，碰到了严重的困难，但他仍然受到一些保护．不止一个人感到，“如果华罗庚留在美国，他将做出更好的研究工作，发表更多的著作．总之，他会做得更好”．与此不同的看法是：他们显然对在美国的爱国的中国人所受到的仇视感觉迟钝了．需知在他们祖国的革命被看成是对自由世界巨大的灾难．华罗庚回国后，钱学森所受到的磨难是众所周知的，这也决非仇视的唯一表现．

华罗庚由依靠国民党转向共产党的第一个动力是他强烈地希望参予中国数学的发展而且认为共产党会支持这样的发展．下面是关于中国的数学，他与 Lehmer 教授谈话的要点：“中国是一个大国，也是一个伟大的国家，为什么我们的数学总是这样落后呢？我们一定要赶上去！而且，我想我们是能够赶上去的．”多年后，华罗庚仍毫不改变地写道：“我要用我的余生将我的科学知识全部奉献给革命与人民”（华罗庚，毛主席指引我前进的道路，中国建设，1969，11，30—31）．如果我们同意这里他所表

达的爱国感情，并考虑到华罗庚贫苦的家庭出身（这是共产党人认为的有利因素）及在美国令人讨厌的政治空气，我们或者可以对华罗庚的转折点作出解释了.

无论如何，也有对华罗庚的行动缺乏同情心的解释，他们强调他肯定收到了从大陆发出的，“半允诺，半威胁”的信件. 按照这种解释，1952 年，New York Times 发表了这样的文章说，在美国学习的六千名中国学生中，除了收到来自中国的“威胁、胁迫及巧妙的劝告”的信件者外，谁都不愿意回中国（New York Times，May 11，1952）. New York Times 还报道说：当华罗庚到达香港时，“一些共产党人给了他一份声明，他被迫在电台上广播说，他在美国受到了虐待，说我们国家充满了种族仇恨”. 然后又故作震惊，但又无实质内容地说：“不久前，华罗庚企图自杀，他跳出了窗子.”我不想评论自杀之说. 这张厚颜无耻的报纸所刊载的故事本身就足以说明美国的主要新闻媒介是仇视中华人民共和国的. New York Times 的说法是愚昧的，也是怀有敌意地伤害了回归中国的学生的爱国感情的. 从而也证实了华罗庚对种族仇恨的“强烈”谴责的正确性.

Ⅱ.1950—1966

华罗庚回国后，他得到了及时的与全部的认同. 1949 年，在北京重建的清华大学很快被改建为一所高等工科大学，并欢迎华罗庚回校工作：他被任命为数学系主任*. 中华人民共和国成立一个月之后，即 1949 年 11 月，成立了中国科学院，由马克思主义历史学家与作家郭沫若主管（前中央研究院已被蒋介石遣散，并搬往台湾了）. 1950 年，华罗庚即参予了重建数学研究所的工作. 当 1952 年 7 月，研究所正式成立时，他被任命为所长. 华罗庚参加了由中国科学院组织的代表团，访问了东欧国家. 在这次访问中，他参加了战后第一次匈牙利数学家大会.

---

* 没有这项任命——译者注

在新政府的领导下，大学教授都参加了指导他们朝着“红与专”目标前进的政治讨论会（“红与专”是一个标准的共产主义格言：基于“专”的领导表示经过组织的机构与任务来领导；“红”的领导则基于团结关系）. 经过 1951—1952 年的思想改造运动，学生与教员被组成一个个的小组，进行马克思-列宁主义、毛泽东著作与“新民主主义”理论的学习，并根据这些著作来检查自己的行为与态度. 思想改造运动的一个主题是对崇洋媚外的指责. 这一主题在朝鲜战争爆发后，就更为加重了.

在这场运动中，华罗庚发表了文章：“我们应当只有一个观念，就是为人民服务”（光明日报，1951 年 11 月 15 日），文章主要是针对清华大学的：每一个班级都很狭小，这表现出对人民群众的义务没有认识. 数学系已经开办了约 20 年，华罗庚完全可以说，他是“知道得很清楚的”. 在 20 年中，仅仅只培养出来 61 个学生及 7 个研究生. 清华大学有足够的设施可以培养大批的学生，但却错误地只培养了少数几个“天才”. 华罗庚也列举了航空工程系的“痛苦”例子：解放前共录取了 10 个学生，其中一个人死了，3 个人去了台湾及 4 个人留在了美国. 华罗庚号召学生与这种自私的传统决裂，而转到为国家服务的立场上来. 国家需要很多训练有素的人才. 华罗庚批判了旧的“半殖民地”式的研究体系，其中少数数学家从外国数学家的工作中找到了题目，然后跟着做，再将论文送到国外去发表，一旦被接受发表，就欣喜若狂. 这种研究就好像是“外国人头上的一朵花”一样，不仅没有根，仅仅只是他人的装饰品而已. 因为美国执行从海上封锁与贸易禁运来孤立与仇视中国的政策，所以一些在大学工作的人担心由于美国杂志的短缺会使中国的科学研究受到阻碍. 华罗庚认为这也是没有理由的. 中国还有另外的渠道来引进近代的科学技术，那就是苏联.

暂时从一个局外人的立场出发，华罗庚可以说很多关于旧政权及其高等教育传统的毛病. 但在这篇文章里，他没有被要求在任何程度上，批判他自己以前跟国民党的联系. 华罗庚作的自我

批评表明了他对于思想改造的基本要求是有最低的自觉性的. 他承认了共产党领导下的思想改造斗争中运用的布尔什维克的批评与自我批评的武器, 并承认了自己的一些不可避免的错误. 他说:"这是我第一次运用这些武器来写文章". 华罗庚采取了建立社会主义世界观的第一步. 他的建设性与正式的全面发展中国数学的计划(例如, 见下面关于典型群领域中培养数学"干部"的计划)给了他在中华人民共和国最初生涯中以巨大的工作动力. 中国在进行着宏大的社会变革, 包括广大的教育试点, 以使大量群众能受到近代科学与应用技术的要点的教育, 而这些是需要华罗庚来付出努力的. 在历史上还没有一个有才干的科学家曾被赋予这样重大的负责全民数学教育责任的人.

中国科学院建院的时候, 就是在苏联的帮助之下进行的. 领导中国科学家的"政治活动"的一个中心环节就是要与苏联同行密切地联系. 1953 年, 一个由 26 个人组成的代表团离开北京到苏联去访问了三个月. 他们访问了 Moscow, Leningrad, Kiev, Tashkent 与 Novosibirsk 的一些研究所与大学. 华罗庚也是代表团的成员. 他在年底在苏联科学院发表了一篇关于中国数学现状的报告(The Present Position of Mathematics in China, Vestnik Akademi Nauk SSSR, 1963, 14—20). 文章一开始, 作者就对 20 世纪早期中国的数学作了回顾: 在国民党的统治下, 中国的数学只有几个领域得到了较好的发展, 例如解析数论, Fourier 级数与拓扑学. 中国学者的研究兴趣是随着西方的潮流而变化的. 中国数学的发展是自流的, 缺乏计划的且发展得很缓慢. 华罗庚在关于清华大学的文章中发展了这一主题, 他写道:

我们的很多同事没有一个确定的研究方向, 他们仅仅根据个人的兴趣来改变方向, 这种改变是根据资本主义国家的"模式"来确定的. 苏联的工作被忽略了. 许多数学工作缺乏实际的目的(仅为智力"游戏"而已), 没有认识到数学是由于实际的需要而产生的.

在解放后的形势之下, 中国有很多科学的问题有待解决, 所

以需要有一个科学的教育及全面的数学发展的全国的计划．华罗庚说，由于我们加速了发展，中国数学与世界的差距正在缩小着．对纯粹数学与应用数学均重要的泛函分析的发展及概率与统计的快速发展就是这样的例子．苏联在这些领域中的文献是特别丰富的．华罗庚还列举了一些正要翻成中文的第一流的苏联教科书．

1949 年，不少领袖数学家离开了中国，成为中国自身的一个问题．华罗庚“遗憾地”指出．当蒋介石将中央研究院搬去台湾时，以陈省身为首的一批拓扑学家去了美国．华罗庚表示盼望他们能够返回大陆来工作——一个未能实现的希望．

1955 年，国务院授权中国科学院颁发一系列的国家科学奖金，以鼓励那些“为建设社会主义祖国作出过重大科学与技术贡献”的科学家，其中包括奖章与奖金（“一等奖”的奖金为 10000 元或 4000 美元）．1957 年 1 月颁奖，被授予一等奖的得奖人为：华罗庚，拓扑学家吴文俊与钱学森．钱学森的得奖工作为工程控制论．华罗庚的得奖工作为他的专著《多复变函数论中的典型域的调和分析》（多复变函数论中的典型域的调和分析，科学出版社，1957，第二版，1965）．这项工作是华罗庚以前发表的很多论文中的结果的系统的总结．华罗庚研究了既约有界对称域的四个典型，它们是复（Argand）平面上单位圆盘与其他区域在高维空间中的类似．这四类典型域 R_{I}，R_{II}，R_{III} 与 R_{IV} 的定义如下：

$R_I=\{m\times n$ 矩阵 Z，满足 $I_m-ZZ^*>0\}$，

$R_{\mathrm{II}}=\{n$ 阶对称矩阵 Z，满足 $I_n-ZZ^*>0\}$，

$R_{\mathrm{III}}=\{n$ 阶斜对称矩阵 Z 满足 $I_n-ZZ^*>0\}$，

$R_{\mathrm{IV}}=\{z=(z_1,\cdots,z_n)\in C^n:|zz'|^2+1-2z\bar{z}'>0,$
$|zz'|<1\}$，

此处 I_m 表示 m 阶单位矩阵，Z^* 表示 Z 的转置 Z' 的复共轭及 z' 表示 z 的转置．

华罗庚计算了每一个典型域的各种自然的几何量，例如度量、体积及曲率．例如对于每一种域，明确地算出了积分

$$\int_D (1-|z|^2)^\lambda \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

的类似，此处 D 为单位圆盘，从而给出了域的体积．华罗庚在建立了几何的结构之后，又考虑了 Laplacian，从而导致了调和函数，及得到有足够光滑边界的齐次圆域的 Bergman，Cauchy 与 Poisson 核的一般定理．对于典型域来说，这些核都被具体地定了出来．华罗庚还给出了每一个典型域的正则 L^2 函数的规范正交系及特征流形的 L^2 空间的规范正交系．他还研究了 Poisson 核的边界性质并解决了 Dirichlet 问题（必须指出，在今天看来，典型域可以看作是有界对称域的特例，所以可以用 Lie 群与 Lie 代数的一般理论来研究它，因此华罗庚原来的结果，现在只要用较少的直接计算即能获得）．

除了上述著作之外，中国在 50 年代还出版了两本华罗庚的数论书《堆垒素数论》的中文第一版是 1953 出版的．序言里讲述了他在昆明给中央研究院投交的手稿被遗失了的事情．由于这个原因及看来他也没有留下复印件．华罗庚说中文版还得从 1947 年出版的俄文版翻译而成．华罗庚用这个偶然的事件来说明："旧政权是怎样腐化怎样地不关心科学，而人民民主政权又是怎样地关爱科学成果"（堆垒素数论，科学出版社，1953，第二版，1957，序言）．

1957 年，接着出版了华罗庚的长达 652 页的《数论导引》，他在这本书的序言里写道："因为我国的参考书少，因此这一本把数论做一个全面介绍的书的写作工作就被提到日程上来"．（数论导引，科学出版社，1957，序言）．书中包括了不少未发表的结果及关于三角和、丢番图方程、模变换及 Waring 与 Tarry 问题的基本材料．在序言里，华罗庚写下了他关于讲授数论课的观点，其中他表示了缺乏中国学生用的合适的数论课本．"在数学史上屡见不鲜地出现过数论中的问题、方法和概念曾经影响过数

学的其他部分的发展，同时另一方面也屡见数学中其他部分的方法和结果帮助了数论解决其中的具体问题. 但是在今天的数论入门书中往往不能看出这一关联性，并且有一些‘自给自足’的数论入门书会给读者以不正确的印象，就是数论是数学中一个孤立的分支.”华罗庚征引了三个具体的例子来说明数论与其他领域的关系：(1) 素数定理与 Fourier 积分的关系；(2) 整数之分拆，四平方和问题与模函数的关系及 (3) 二次型论，模变换与 Lobachevskian 几何的关系.

序言中的第二个观点是说，由具体到抽象结果的进展对于数学教育是很基本的. 华罗庚还解释了他是如何处理分拆函数 $p(n)$的——$p(n)$表示将正整数 n 分拆为正整数之和的分拆个数* 用代数方法可以得到 $\log p(n)$的渐近值;用 Taubrian 方法则可以得到 $p(n)$的渐近值.最后,用模函数理论及解析方法更可以得到 $p(n)$之展开式.

华罗庚还追忆了该书的写作过程：

“一切还是那么清晰地在记忆之中，那是 1940 年左右在昆明联大初次讲授数论的时候，就计划要写这么一本书. 那时根据已有的札记和若干新作就写了八、九万字的初稿，估计着再写两、三万字，就可以出版了. 但是何处可以出版？因此也就上不起劲来完成这一工作了. 在美国执教的时候，又补充了些，改写了些，但那时补充和改写都是为了教学而并没有考虑整个书的出版问题. 真正积极认真地工作是解放以后的事. …在同志们的帮助下，工作进展得反而更快了！篇幅大大地增加了，并且添了一半以上的新章节，采取了不少近年来的新成就——可以包括在本书范围之内的新成就”. (第 391 页). “数学评论”不寻常地给予了这本书以慷慨的赞扬：“这是一本有价值与重要的数论教科书，它是按 Hardy 与 Wright 的著作《数论入门》的风格来写的. 但范围却大大地扩充了”. 并称赞该书是用“非常清楚与简单”的

* 原文将 $p(n)$误为 $\pi(n)$.——译者注

文言文写成的，可以将它推荐为一本很好的数学中文的入门书.(Mathematical Reviews, 1959, 829. The Reviewer was K. Mahler, A Prominent Number Theoretist Fluent in Chinese).

为了鼓励有科学才能的人，在50年代中期，中国科学院举办了中学生的数学竞赛活动. 这一活动是以匈牙利的数学奥林匹克为模式，亦类似于苏联的数学竞赛. 竞赛的题目虽然初等，但却很伤脑筋，也很难. 只有经过踏实的与正规训练的学生，在经过严格地与富有想象力地思考之后，才可能解决这些问题. 华罗庚的确希望通过这一活动来推动中国数学的发展. 按照德高望重的数学家与教育家George Polya的意见，匈牙利的数学奥林匹克已经对匈牙利的数学发展作出了"本质性的贡献". (George Polya, Mathematical Discovery, vol: Ⅱ, New York, McNally, 1964. p. 186). 华罗庚努力通过对青年写文章与谈话来鼓励他们经过竞赛来学习数学. 1956年7月，在共产主义青年团机关半月刊物《中国青年》上，华罗庚发表了一篇文章："聪明在于学习，天才在于累积". 他在文章中说："在我的身上是找不到这种天才的痕迹的". 他肯定地说："所谓天才"靠的是学习，他进一步地谈到了研究科学的方法论的问题，必须注意到科学的方法. 我们对现实的了解是符合逻辑的，而学习与研究科学就如同爬楼梯一样，"如果我一次就爬四、五级，想'一步登天'，则我们就会掉下来，并摔破了头"("聪明在于学习，天才在于积累"，中国青年，1956年7月，15—17)，尽管对自己的否定不是完全可信的. 或许华罗庚已经给那些想学习数学的读者树立了信心，即他们的确可以学习高等数学的——有时候将困难估计得过高了——用逐步地、有引导地去工作. 数学决不是少数"天才"的领地，对于数学的抽象的恐惧是可以由近代数理科学中关于定义与公理方法的系统地揭示来加以消除的.

循序而进决不等于学习的不断重复. 华罗庚严厉地批评了死记硬背的学习方法. 这是中国及其他一些地方阻碍创造性思维的传统方法. "例如一个学生学习数学，他拿来很多本同等水平的

微积分书，花费了很多时间，一本一本地去读．一个一个习题地去做．这是书虫的读书方法．”与此相反，学生应该选择一本好书．在一个合格老师的指导之下，从头到尾地仔细去阅读，然后再去读一些更高深的书．一个能够得到具体指导的学生就可以学到数学的基本知识并同时可以开始做研究工作．为了做好研究工作，学生必须要独立思考才行．由于客观世界是经常改变的及科学工作是不断发展的，所以需要全新的与创造性的工作及需要有勇气去进行创造．华罗庚进而谴责了大学生中流 行的死记硬背的学习方式．他说：“当我访问民主德国的时候，我们的留学生告诉我：因为在国内的大学中，没有对学生的独立思考能力作很好的训练，所以他们碰到了严重的困难……．他们的阅读能力与听课能力都不比德国学生差，但当他们参加讨论班的时候，他们就显得不行了．他们甚至不知道如何去寻找参考资料．即使他们找到了参考资料，他们也缺乏新的想法……．在我们的国家里，一些大学仍然采取老一套的教课方法：学生有不懂的地方，就去问老师；如果他们仍然不懂．就再次去问老师；如果还是不懂，就第三次去问，一直到完全明白为止．这固然是一个省力气的办法，但不幸地是，你不能用这个办法来讲授所有的事情——如果老师真能够用这种方法来讲授一切知识，那末学生就不需要做研究工作了．导师的目的是指出一般的方向，使学生不致于到处去摸索．但学生也必需亲自体验一下前进中的障碍．”

因此华罗庚提倡师生之间亲密团结的关系．老师通过文献来指导年轻的数学家，使他们明白到底他们已经懂得了些什么，然后指点给他们一条宽阔的科学研究的道路．他的劝告是有道理的．虽然这只是对中国学生而说的，但对于任何其他国家的学生来说，也是有意义的与可以接受的．从这篇光辉的文章里，我们也进一步了解了他自己的数学生涯——踏实地工作，创造性地成长与发现．

除了数学之外，华罗庚还活跃于国内与国际的一些事务之中．他是北京市选出来的中华人民共和国的权力机构全国人民代

表大会的代表. 在 1954 年召开的第一次大会上，他作了演讲并当选为主席团的成员. 在华罗庚的简短发言中，有两点意见是突出的.（人民手册，大公报社，天津，1955，165—166）. 首先. 他承认"在过去的五年里，……，科学家未能跟上我国快速发展的形势，……，我们还不能适应生产与建设的需要". 在会上，他表示了对古怪的与狭窄的科学的批评，关于这一点，他已经在 1956 年《中国青年》上发表的长篇文章里作了详细的阐述. 华罗庚说：不靠艰苦的努力，而"靠偶然的机会与先天的聪明与取巧去取得惊人的成就"决不是科学家的本份. 相反地，科学家必须努力地工作，并且要遵循国务院文化教育委员会的指示："改革与稳妥，重点发展，改进质量与提高数量，稳步前进."

1954 年演讲的第二个主题是科学与文化对社会主义国家的关系. 华罗庚引用了列宁的论断："只有我们用全部人类的知识来武装我们的头脑的时候，我们才能认为我们自己是共产党人了."列宁的具体的与有普遍意义的论断不仅是科学研究的指南，而且也是国家的文化政策的指导. 忠于列宁的态度是评价"专家"的标准——以前社会的科学与文化知识的积累. 在会议的讨论中，许多代表都很赞成新宪法第 95 条所说的，人民政府要对科学、文化与艺术表示关注. 华罗庚说："作为一个科学家，我也极富有同感，特别当我回想起在反动政权统治之下，我不能发表我的著作时，这种感觉就变得更深了."他继续说："广大人民群众衷心地期望克服科学、文化与艺术的落后状态."华罗庚接着说：

自然，我们每一个在科学、文化与艺术领域里工作的人有责任改正自己的缺点. 但另一方面，我们也希望政府能照顾那些负担过多社会活动的专家，使他们能够有从事他们的专业工作的时间，使他们能够有时间来学习、研究与写作.

最后一句话是比较含糊的. 华罗庚的语气是温和的但也是准确无误的，即应该减轻由旧社会来的老专家过重的包括政治会议与行政工作在内的"社会活动"以充分发挥他们的作用. 这将预

示着在百花齐放运动中发生的冲衡.

华罗庚回国后不久，他即成为中国保卫世界和平委员会及中苏友好协会的委员. 当1952年10月，在北京召开亚洲及太平洋地区和平会议的时候，华罗庚作为一个爱好和平人士参加了会议. 1954年，他代表中国参加了在斯德哥尔摩与东柏林召开的世界和平委员会会议；他还被指名为根据万隆精神召开的亚洲国家会议中国筹备委员会的委员之一. 1955年4月. 他作为以郭沫若为团长的代表团成员参加了在新德里召开的所谓亚洲国家“解决自身的科学、技术与工程问题的协调”会议.（人民中国，1955年5月1日，补充Ⅱ，第6页).

1956年2月，华罗庚同时当选为中国民主同盟的第二届中央委员会委员与其常务委员会委员. 民主同盟是知识分子反对国民党的一个组织. 1941年在香港出版的机关报《光明日报》是它的第一个出版物. 中国的报纸之一的北京《光明日报》是它的继续. 解放后，民主同盟帮助政府团结了一批知识分子. 民主同盟的一些领导人是各种重要的职业团体的代表人物，其中有些人已回到了自己的专业工作中去了.

百花齐放运动与大跃进

1956年上半年的“百花齐放与百家争鸣”运动中（“百花”比喻各种倾向的思想)，中国民主同盟的领导人深深地涉及了进去. 这个对知识分子的新政策是1956年1月24日在共产党召开的一次会议上，周恩来所作的“知识分子问题报告”中首先宣布的. 周总理承认，“在知识分子的使用方面存在着不合理的现象，特别，我们有部分同志，他们对党外知识分子有些宗派主义”. 不合理的现象之一是任命从事科学研究工作的科学家担任机关与学校的行政工作人员. 另一点为不信任知识分子去工厂参观及“他们应该看的某些资料”（周恩来，知识分子问题报告，北京外文出版社，1956，第18页). 人民日报发表了关于科学研究的紧迫性问题的意见：

我们的科学技术严重地落后了……. 为了提高我们的科学与

技术的水平，我们在学术方面，应该彻底地实行百家争鸣式的自由讨论的政策．我们不仅必须学习苏联与人民民主国家的先进的科学技术，而且我们也必须学习资本主义国家，特别是美国、英国与法国的先进的科学技术．如果有什么科学与技术知识能够用于我们的社会主义建设，我们就必须认真地加以学习（人民日报，1956年5月9日）．作为新的灵活性的主要部分，周恩来承诺了改善知识分子的生活与工作的条件（较好的住宅、工资与奖励）及“六分之五”公式，这就是说至少有六分之五的时间可以做他们自己的工作，其他剩下来的时间才用于政治学习、会议与其他事情．图书馆与科学研究的设施需要加以扩充．当中国开始进口大量的科学文献与设备的时候，中国科学院的图书馆倡议与国外进行了一系列图书与杂志的交换．1956年春天，即使是非马克思主义者的知识分子亦被鼓励对共产党提出批评意见，这导致了“自由化”的新历程．1956年至1957年6月．——五年计划的基本目标被宣布已经达到了——这是解放后最乐观与最有信心的时期．许多知识分子响应了号召，对社会问题作出了批评．

正如前面所述，华罗庚已经代表了“科学、文学与文化工作者”向政府请过愿，要求减少他们从事行政事务工作的时间及扩大他们为社会主义建设服务的机会．在百花齐放时期，他补充了他的请求，并且将他自己和两个中国民主同盟的高级领导人章伯钧与罗隆基的“联盟”1922年至1925年，章伯钧在柏林学习哲学．1928年8月，他参加了共产党领导的南昌起义，从而成为反对国民党的中国民主同盟的一个领导人．1949年6月，他出任《光明日报》的责任主编．一直到1958年，他都担任政府的交通部长；1921年，罗隆基毕业于清华大学，利用庚子赔款赴美研究政治学，并于1928年获得Columbia大学的博士学位．回中国后，由于他强烈地批评政府而坐了一段时间牢．以后，他成为一名政治评论的撰稿人．他与章伯钧一样，是一个小政党的领导人．一直到他被解雇为止，他都在西南联合大学执教．然后，他担任了民主同盟的昆明支部领导人．在人民政府下，他经常活

跃于外事活动中. 1956 年，他被任命为森林工业部部长（Boorman, Biographical Dictionary, vol. Ⅱ. 98—100, 435—438），联系在了一起. 罗隆基将知识分子"改行"问题总结如下：学哲学的毕业生被分配到图书馆里做图书分类工作，法律系的毕业生被安排在办公室里整理档案，学化学的去教中学的语文，学机械工程的去教历史. 在高级知识分子中还有些从英国回来的，为了维持生计去做小商贩；有的从美国回来的去摆烟摊（人民日报，1957.3.23).

高教部副部长曾昭抡，在 1957 年 6 月 6 日的六教授会议上说：人们不要以为文人不会造反，挑起动乱是中国知识分子的传统，汉代的国子监和 1919 年五四运动的学生都在中国制造了大风波（人民中国，1957.8.16).

曾昭抡是中国民主联盟科学研究委员会的领导人. 他在 6 月 9 日发表了一份给国务院的、由五人签名的大胆建议书（曾昭抡排在签名的第一人，随后是千家驹、华罗庚、童弟周、钱伟长).

我们建议：(1)除少数人外，有领导科研能力的科学家，尽可能不担任行政工作，特别是 60 岁以上的老科学家，急需传授东西给后代，更应如此；(2) 保证每个科学家每年有一定的时间完全自由地从事研究工作，政府必须考虑规定教授和研究员的休假进修制度；(3) 除少数例外，科学家担任人民代表和政协委员职务的，一般只限担任一职，地方的不兼中央的，中央的不兼地方的；(4) 由于进行科研工作的需要，科学家对社会活动和行政工作可长期请假；(5) 非必要时，招待外宾不应作为科学家的任务（光明日报，1956, 6.9).

随后还有其他的建议，呼吁科学家有选择自己助手的自由；停止对科学家、教授的学术资料的保密要求；帮助那些没有就业的或已就业而用非所学的科学家"归队".

6 月的第二个星期，当曾昭抡、华罗庚和其他人正在积极推进中国民盟科学规划时，政治风向变了，这个规划已被贴上反社会主义的标签. 从 6 月 8 日反击右派的人民日报新闻骨干会议开

始，到6月中旬，整风运动完全转向（胡愈之的报告，“右翼小集团的暴露”，第17页）．使许多知识分子震惊的是，中国民盟的科学规划被指责为是向党和政府进攻的毒草，民盟领导人被指责为企图煽动学生闹事和抓所有学术的领导权，以及要建立Anglo-Saxon型的议会制度．在6月末开始的全国第二届人民代表会议上，周恩来在讲话中针对中国民盟的科学规划做了回答，如同他在1956年的报告一样采用了辩解的调子，他否认了共产党不懂科学或相对于专业是“外行”的说法：

如果“外行”没有资格领导专家的话，就意味着只有在自己领域中的专家才有资格领导自己，这不仅否定了对整个科学的领导，而且同样可能取消对科学研究的统一领导，因为不可能有一位科学工作的领导人精通所有的科学领域（NCNA，1957，6.26）．

一位人大代表支持共产党对科学的领导，站在周恩来一边：

所谓“外行”（指共产党）没有能力领导“内行”（钱伟长的话）是可笑的，……，现在科学工作的分划是如此之细是人们所公认的，不仅无所不知的科学家是不存在的，而且熟悉一个学科的所有分支的人也是罕见的．

我们的共产党是马克思主义的党，因为马克思主义是普遍的科学真理，党自身就是科学的产物．仅凭他的卓越科学品质，他就能站在一切斗争的前面领导，并取得每一次的胜利．

科学进步没有组织是不可想象的．它需要一个总协调办公室和一个总领导指挥部．我们共产党确实对这些负有责任并能和应该担此重任．

这些话出自华罗庚，他在6月23日的《光明日报》上发表文章，保证学习更多的马列主义，逐步建立共产主义世界观，并决心击退“右派分子”的阴谋．

在他的两篇检讨文章中，他解释说，他的政治嗅觉不足以使他识别在民盟中那些利用科学家的右派和政治野心家的阴谋．他谴责曾昭抡在发表6月9日科学规划时没有征求他的意见．按他

6月23日文章的说法，在科学规划送往国务院科学计划委员会之前的几天所开的最后一次会议，华罗庚和童弟周都“因其他事情”而未参加．他们没有参加最后决定性文本的完成．他否认了责任．最后由钱伟长和曾昭抡承担了责任．

这些伴随着争吵与纠纷的转弯运动，迫使民盟领导层表态，抨击章、罗的斗争被斯诺描绘成是“残酷的”，他说有几百个持不同观点的知识分子被清算并受到污辱（Snow，The Other Side，p. 401）．华罗庚虽然没有经受这些打击，但在整个事件中，他仍然受到压制．我们查阅了以前《纽约时报》关于华罗庚在1952年企图自杀的一则报道．这篇文章可能受到好事者关于他在1951—1952年思想改造运动中的处境以及他受到牵连的估计的影响．但是，现在在西方的中国知识分子说他在1957年试图自杀．这跟在6月份的派别斗争中华罗庚被粗暴、严厉地要求作不关心政治的自我批评，以及整整五个星期他被搞得晕头转向并受到耻辱有关．

连续不断升级的思想改造运动，可以追溯到1942年，这是中国共产党对知识分子的政策．1957年的反右运动虽然并不漫长，但是，它是极具讽刺性的．因为这次运动谴责知识分子的实际行动，而知识分子相信：他们的实际行动具有建设性并始终和共产党的政策相一致．民盟的建议，包括科学规划在内，被说成是民盟反对共产党的思想基础；其实在论述科技进步方面是非常有条理和理由充分的，在其中很难发现西方议会的精神实质．

Isaac Deutscher在他的“共产主义的三种倾向”一文中，批评“百花齐放”是一种引蛇出洞的诡计（Ironies of History，Essays in Contemporary Communism，pp. 68—87）．有证据支持Deutscher的论点：百花齐放运动“太过火以致不能自圆其说，以消除其消极性，Deutscher论证：在每次革命运动中，当革命政府被现实震惊或明显孤立时，就会出现“危机和悲剧时刻”．他相信，1957年6月正是这样的时刻；当时毛泽东受到来自知识分子大量的敌意批评的“惊吓”．中国事件的Deutscher解释听

起来像是真理．但是，确实1957年夏天导致党的政策转向“低沉”的结果．这在某种意义上是不可逆转的．我们缺乏真实的和说明性的材料，以改进他的或别人的外部分析．Deutscher强调“中国人自己”缺乏提供一个在反右斗争期间，他们行为的坦诚与信服的解释．

但是，在1957年开始的反对他过去的无情斗争的过程中，华罗庚学会了如何去恢复他的自信．对个人的复原和协调表现出极大的能耐，当他的思想缺点受批判时，作为有声望的自学成才的学者和数学界的领袖，他的政治家风度异乎寻常地使他战胜了自己．他的自我批评最终总是被接受．1957年他得到绿灯继续进入中国民盟中央委员会和中苏友协（甚至曾昭抡也没完全被清除，作为科学行政官员，他一直起作用到了60年代）．尤其是华罗庚，在1959年第二届全国人大和1964年12月至1965年1月的第三届全国人大上，他都重新被选为常务委员．

虽然反右运动最先是以提出批评意见的知识分子作为目标的，但它转入群众运动就反对整个知识界了．许多经济专家和毛泽东经济政策的早期评论家，由此从有影响的位置上消失了．在这样的气氛中，大跃进被发动起来了（Franz Schurman，共产主义中国的意识形态与组织，第91页），号召快速强攻科学高峰．1958年9月，中国科学院建立了以郭沫若为校长的中国科学技术大学．她的教学人员是由中国科学院各研究所“顶尖的研究人员”组成，包括有应用数学与电子计算机系主任华罗庚和力学系主任钱学森在内．在1600名学生中“大约有70%是来自工人、农民和革命干部家庭”，他们是经过“严格的全国性考试”后被录取的（NCNA，1958，9．20）．负责全国总体科学规划的副总理聂荣臻，曾描述这所学校为：

这是一所新型的高等学府，它紧靠中国科学院各研究所，并以最先进的科学、技术做为主课，它接收最优秀的中学毕业生，……，加速建立一支新的科技队伍，争取在短期内，把中国建成为一个先进的国家（NCNA，1958，9．20）．

自从这所大学成立以来，集中培养了一批科技力量，为科学院输送了科学技术人才，科学院开始把它做为培养科技人才的国家中心. 1961 年，华罗庚被任命为这所大学的副校长. 可以相信，在这里他能继续集中进行数学研究活动.

在大跃进期间，中国与西方世界的联系减慢，华罗庚未做任何解释就辞去了从 1947 年 11 月到 1959 年 12 月一直担任的《数学评论》刊物的评论员的职务，并把还没有校阅完的论文退还给 Providence，Rhode Island 的杂志编辑部（Chandler Davis，个人通信，1970）.

在大跃进期间，自力更生的方针无疑影响了科技交流的学术政策. 但在 1960—1962 困难时期，曾恢复了一部分关系，中国与境外的科技界交流有所增加，然而这种交流是有限的，也是有选择性的，侧重寻求来自社会主义国家的科技援助. 中国文献进口的数量也有一些增添. 中国图书馆和一些西方大学及研究所的图书馆之间也做了出版交流的安排. 1960 年《数学评论》的翻译编辑 Sydney Gould 着手同日本、印度、苏联、波兰和其他跟中国有学术交流的国家交换了意见，其结果是，中国科学院数学研究所的主要刊物《数学学报》的全部译文于 1962 年开始由 Gould 负责编辑出版. 并且，在 60 年代早期，英国皇家学会与中国科学院共同商定并签署了交换留学生和学者的规划.

1963 年，华罗庚与万哲先合作的一本书——《典型群》正式出版，共 12 章. 我们可以从 Dieudonné 的《典型群几何学》里的广阔的参考文献来评价华罗庚在这个领域的研究贡献. 在第四章里，Dieudonné 把许多有关典型群的结构和自同构的重要结果都归功于华罗庚. 1962 年 8 月，在《典型群》的序言中，再一次用丰富的资料肯定了华罗庚的生动活泼的教材的条理性，并且指出这本书在华罗庚的心目中已反复考虑过很长时间，华罗庚还写道：在 1949 年就构想过给研究生和高年级学生办一个讨论班的计划，指导他们在典型群、射影几何、矩阵论以及群表示论方面进行研究. 早在 1950 年，华罗庚到达清华大学开始，直到

1951 年夏天，华罗庚都在组织讨论班，并且还草拟了《典型群》的前六章．同时他还点明了他对教学的全面考虑：

华罗庚选定这本书的原因之一，在于对培训干部来说，这是一本易于入手的书．它只需很少的预备知识，可以在简单、一般的水平上开始讲授，其发展前景是无限的．按这个计划研究，可以自学代数和几何的许多分支，然后我们再致力于广度和抽象(华罗庚、万哲先，典型群，序，1963)．

1951 年的后半年及 1957 年的前半年，华罗庚两次在中科院代数讨论班上报告了这本书的前六章的主要内容．在华罗庚报告之后，万哲先也在讨论班上讲了该书的前六章的部分内容．然后，按照以前的材料的内容、精神和方法，完成了余下的章节．"经过 10 年之后，我们仅完成了计划的最初的部分，更重要的工作还在后头"．

域 $\mathscr{K}$ 上 $n\times n$ 可逆矩阵群，称为 $\mathscr{K}$ 上的一般线性群，记为 $GL_n(\mathscr{K})$．矩阵群是局部紧致群的子群．因为一般拓扑群的研究与矩阵群比较起来，都是很近代的学科．"典型"这个惯用词是用于矩阵群的．在这种思想下，典型群被定义为 $GL_n(\mathscr{K})$的子群 H，或是这样两个群的商群 H_1/H_2．射影群 $PGL_n(\mathscr{K})$是 $GL_n(\mathscr{K})$与 $n\times n$ 非异数量矩阵群(那是在对角线上都有相同非零元素 a，而其余元素都是零的矩阵)的商．特殊的线性群 $SL_n(\mathscr{K})$是 $GL_n(\mathscr{K})$的子群，由所有的幺模矩阵(那些行列式等于 1 的矩阵)所组成；典型群的另一个例子是酉群．Dieudonné 定义 $U_n(\mathscr{K},f)$为 $\mathscr{K}$ 上保持给定形式 f 不变的 $n\times n$ 非异矩阵群．当 $\mathscr{K}$ 是复数域 C 时，那就是所有酉矩阵($UU^*=I$)的群，并且 $f(x,y)=\sum_{j=1}^{n}x_j\bar{y}_j$．正交群是酉群的特殊情形．最后一个例子是辛群，对于交换域 $\mathscr{K}$，这个群是 $U_n(\mathscr{K},f)$的子群，由所有保持交错形 f 不变的矩阵组成．

几何学家告诉我们，为什么用"典型"这个形容词的另一个理由．那就是当 $n=2$ 或 $n=3$ 时所考虑的群是与古典几何（如欧几里得、射影、双曲、椭圆等几何）相关联的变换群．因此，

华罗庚的讲授特点为他的论述中综合了几何与代数中的许多分支．华罗庚指出，结合环、李环和约当环理论的有趣部分，都有其矩阵形式．在多复变理论中的“典型域”，如上面提到的华罗庚关于调和分析的专著，也有矩阵的表示形式．

在《典型群》书中，华罗庚开始介绍实数域和复数域以及有限域和四元数环，进而研究体上的矩阵群和群表示．该书前五章论述了射影几何和长方矩阵几何、第六章是论述了 GL_n $(\mathscr{K})$ 的结构和它的自同构．该书的后半部论述了酉群、正交群和辛群，以及它们的自同构，并对示性为 2 的域作了必要的区分．

线性规划群众运动

1958 年 12 月之后，中国工业政策被修订了．在大跃进期间提出的高且不平衡的经济增长指标，在各非农业部门不能完成．虽然被浮夸的工业和经济，自称达到了指标，部分是基于膨涨和完全错误的统计（Barry Richman，Industrial Society in Communist China. p. 14，1969)．为建设共产主义的“失败的工业化”计划，在几年后（1958 年农村土高炉炼钢早被迫放弃）凡撰写文章的西方的大多数学者，都认为那完全可能是错误的，尽管有的争论赞成形成了经济的分散经营化、本土技术和地方小型工业的发展．中国在 1958 年农业大丰收后遭受三年农业危机的袭击，1959—1961 极为严重的减产．国家的经济重点转为大力支持农业生产，并且号召数学家从其他任务转为参加到这个工作中去．

华罗庚当时被委任去北京郊区参加小麦的收割工作．1960 年他在《光明日报》上发表一篇很长的文章，题为“运筹学”，这是应用到国民经济建设中的一门新的科学分支．华罗庚在开始探讨时便写道：

首先，我应该说明，在线性规划上，我是一个新手……既然现在各行各业都在支援农业，而数学工作者也要考虑如何支援农业．我写此文，主要是介绍线性规划在农业上的应用．我认为，这篇文章在许多方面还很不完善，因此要请同志们提出宝贵意见”(光明日报，1960．11．1)．

运筹学，按其本意来说是“运营和规划的科学”，它包含线性规划和其他最优化技术对经济决策的应用. 根据华罗庚所说，在当时，山东省短期内就组织了40万以上的人参加普及应用线性规划. 他们当中包括大学、中学和小学的教师以及工人、农民和管理人员. “通过各种宣传媒介，例如广播，民歌、西洋镜，幻灯和歌曲来宣传，使得全省八百多万人对线性规划有了进一步的了解”. 确实收到了一定的效果. 科学院在山东省省会济南召开现场会，把山东的经验介绍给“全中国广大的数学工作者”.

在他的文章说明中，还介绍了运输和分配问题. 在那里，线性规划主要应用在消除对流和迂回造成的浪费上，而这些不合理现象在复杂的商品运输中是不易发现的. 他强调被称作运输问题的“本国”图上作业法的发明，它既“简单又易被群众接受”，也有像现代代数格式方法，他们称之为“表上作业法”(那无疑是著名的 Dantzig 单纯形格式).

在农业上，华罗庚选择应用线性规划方法的一个代表性的问题，是小麦打谷场问题. 已知若干块“面积不太大”的麦田. 它们之间有各式各样的道路相连，但“无回路”，我们要确定在什么地方为小麦设打谷场，能使小麦的运输量最小？华罗庚用山东曲阜师范学院发现的一个公式回答了这个问题. “最好的打谷场应选在沿每条路运来的小麦数量都少于小麦总量一半的地方”. 由于数学家不熟悉这类问题，那就需要学习一些资料和发挥某种想象力，去理解如何运用这个凭经验得来的好像是正确的原则. 正像文章中还谈到的那样，每天都有用非技术语言提出这种问题. 可以确信，在适当条件下，华罗庚认为这些原则是有效的，然而运筹学工作者却未能发觉文章中提到的这些.

华罗庚非常关心普及运筹学，他称这是传播新的科学分支，除了以上谈的打谷场问题外，他还介绍了其他有趣的问题，其中数学方法能够为生产实际服务的，在他的清单中包括水库的管理，这里要控制的参数是，为了航运，水流的速度，为了发电，水的排放量，以及为了节制秋天暴雨的季节性，“水的预算”量.

“一系列关于水库管理的理论和方法被总结出来，并推广建设和管理小型水库的本国方法…那么对为灌溉和发电的中型水库的运作就不难了．有了这些经验，运作大水库也就容易了”．另外提到的其他问题有：根据天气资料，使农作物受害最小；根据不同土壤和灌溉条件制订出各种农作物的最佳播种方案；根据若干平方米土地生长的麦粒平均数的抽样，估出全公社的总产量．

总之，文章强调，在做合理决策时，要用初等的基本的最大最小方法做指导，而不必过多地套用线性规划．为此，华罗庚还举例说明：

我们不难发现在已知给定了体积的条件下，一个圆柱体的铁皮罐，当它的高等于底面圆的直径时，所需的马口铁皮的面积最小．西方国家的制造厂生产的细长和矮粗的铁罐，其目的只是给顾客一种错觉．我们发现矮粗的铁罐，能节约 10% 的马口铁材料．

虽然华罗庚举例子是启发、激发大家对数学方法的兴趣，没有反映在推广活动中所采用的数学步骤，但人们还期待详述：在运用更复杂的规划方法方面，农业工作者与数学家如何相互紧密合作的．即使在研究了推广活动期间提出的专业论文之后，这个问题仍然是非常突出的．

华罗庚的文章是归纳数学研究所、科技大学和其他研究机构，在参加了北京郊区的麦收工作后总结出来的．该文的目的在于叙述从运输角度如何运用数学模型去选择最经济的打谷场的经验．关于这种经验的资料是由华罗庚和其他人汇编整理的，1960 年在山东济南运筹学现场会议上进行了宣读，并在《数学学报》上发表（数学学报，1961，I，2：77—91）．其中的第一部分，就是“在葡萄串式的麦田上，选择打谷场”的问题．

为了指导农民在他们的麦田上选择最好的打谷场，在普及活动中，便于记忆的民歌被创作出来了．若只有两块麦田，那么这种最简单情况下的解决办法是，将小块的小麦运到大块地上，并在大块地上设打谷场；若道路是平坦的，这就是设立打谷场最好

的地方．有一首民歌说道：

道路无回环，
抓各端，
最小进一站．

一“端”是指仅在一条路上的块麦田；“环”是指包含若干块麦田的闭路．

民歌接着唱道：

道路有回环，
每圈甩一段，
化为无回环，
然后照样算；
甩法有不同，
结果一一算，
然后再比较，
最优立可断．

这就是说，道路被甩掉一段后，使得每块麦田都变成了“端点”．甩段有许多方法，计算每一种甩法，然后决定最好的破环法．

在《光明日报》上给出的这个简单的公式，虽然其原理有脚注性的参考证明，其意思是“在超过总量大半处建打谷场，少于总量一半的往里靠”．然而，人们不能把这篇文章做为普通的数学论文来读，因为它“强调的是方法与结论”，而不是它的证明，况且它的语言就像通常数学论文一样精炼．此外，原问题的术语也没完全被引进，而靠概略的图解得出结论．图解是用选择好的情形来阐明某些原理，但没有给出人们所引用的文献资料．这就使得在运筹学领域中工作的人感到困惑，很可能要求与文章的作者取得联系，以便成功地应用这种技术．

文章的第二部分是“大块麦田打谷场的选择”．那是假定麦子平均生长在大的长方形麦田中，此时的结论是：当在麦田的内部建打谷场时，建在矩形中心是最好的．当在麦田边缘上建打谷

场时，建在长边的中点上最好．当然，“在不规则”的麦田上选择打谷场的问题上，就不能如此简单地解决了．

这篇文章仓促发表在《数学学报》上是很可能的．为此，作者写道：“由于时间紧和从事这项工作的这些同志们的水平所限，只把材料整理出来发表，还很粗糙，我们希望所有阅读本文的同志提出宝贵的意见”．

另外，该文提出的一些便于记忆的民歌和解决现实生活问题的初等方法的建议，也发表在1961年8月英文月刊《中国建设》上．

包括这篇文章的每篇文章中，作者也看到了在数学规划方面，数学自身的内容是轻微的——平面几何和简单代数中的最大最小问题．华罗庚普及数学的教学方法特点没有贯穿其中，那是些形式上学样子的工作，不像华罗庚自己做的，因此不能产生多少激情*．在线性规划活动中，在数学上从未有过任何新的突破．但确切地说，华罗庚搞线性规划的目的，是想通过发展想象力的教学方法来帮助广大的劳动人民，并按现有的生产方式应用定量分析技术来解决实际中的问题．因此，应该由科学家和广大人民群众共同对新教学法的作用、应用技术的范围、合作关系的性质等方面来评价线性规划活动的效果．我们除了在华的自我批评中看到一些外，很难获得任何有关资料．

在推动社会进步中，数学家参与实际工作的困难是什么？为获得对此问题中肯深入的见地，我们必须看中国数学家参加社会主义建设的另一个活动．那是在1964—1965年间，当时华罗庚花费了约六个月的时间去普及、推广统筹方法，帮助人们在市政工程、工业和制造业项目方面进行实施．“统筹方法”是一个非技术性的术语，意思是从开始到完成去规划它，包括一系列工业任务和它们之间的各种关系，并从中找出一个最短的捷径．像一

---

* 这篇文章不是华罗庚写的，当时为了扩大影响，所以用了他的名字发表——译者注

串葡萄式的麦田这种问题，被图论相似的方法解决了．华罗庚努力尝试的统筹方法，后来在共产党的理论刊物《红旗》和《人民日报》上发表．对华罗庚来说，“走革命道路”是一条困扰的道路，因为他一直相信自己的老的观念，比如，方法与问题是极其重要的；在过去某人给他提一个问题，他会严谨地处理它，并给出解答而不要说明为什么和使用的方法怎样，或许深奥的数学需要解说．更进一步，他认识到，要主动地去寻找问题，并给出每一步既透彻又简单明了的解答．当更多的人学到了数学知识，数学家不但没有垄断他们的专长，而且更乐于为现实的生产服务，“也就能够更容易地提高到更高水平”．当《人民日报》发表学习奉献和自我牺牲的英雄典型时，华罗庚估量自己进步的障碍是“从旧社会来的、觉醒晚、觉悟低”，他要求把自己的才能用于实际生产中去．但光有已有的方法是不够的，当现实工作到来时，每一步都出现了挫折．

当我第一次接触规划方法时，我想拒绝它．即使我不是很好的数学家，我也从不用规划方法打扰自己的？因为这方法产生于资本主义国家，它不沾染资产阶级的气味？假若我使自己从事这方法的研究工作，我可能容易使自己受污染．我为什么去做它？让我离开它，让我跨过它转到其他科学部门和其他人群．

第二个障碍是“怕”．第一次我去做选点试验，我是过于大胆和自信……一到现场，我看到那是非常巨大和复杂的计划．那里有许多东西我不懂．突然我受“怕”的冲击…对我们所幸的是，地方党组织及时对我们做了思想工作．安排我们深入现场去发现实情，听模范人物及其功绩的报告，我们得到了鼓励．

我还有一种“怕”，我害怕其他数学家对普及科学工作可能说些什么．他们可能说，这种工作没有先进的数学，是“无趣味的”，是简单的数学，甚至说那没有任何数学．这种想象的批评，事实上是一种错误的观念．我是用旧的自我标准去衡量新的一代人了．

当走与工农群众相结合的道路时，“无私”是一种进步，华

罗庚发誓他的“自我”意识将逐渐消亡. 他将与他的同志们一起奋斗，成为“不为个人”而为革命努力工作的人.

他自己的利益，虽然有明确的规定，确实一度受到损害. 他在中国科学院数学所的工作，在《红旗》和《人民日报》两篇文章中都没有提到. 后来，他确定仅做为中国科技大学的副校长. 这使人联想到他在数学所的领导位置可能有了问题.

《人民日报》最后的专栏值得充分引用，因为它预示着他的许多未来的东西：

“毛主席告诉我做什么我就做什么”，这是王杰同志的名言，他一直响在我的耳边. 虽然我青春已过，但我还有一点时间，毛主席思想像“不落的太阳”照耀着我，在太阳的光辉永远照耀下，我要坚定地、永不停息地走革命的路.

Ⅳ.1966—1970

文化革命事件迫使我们改变了这篇传记的特征，1965 年后数学出版物中断，也就不可能从中得到研究华罗庚的第一手资料. 为了便于正视至少包括他近来重建的事业的某些问题，我们将考查文化革命对教育和科学的影响. 这些领域受到的损害可以分几个时期，它可以用红卫兵和革命造反派冲击教育系统来划分其界线：1966 年中期文化革命开始；1967 年中期科学院第一次试图恢复统一；1968 年 7 月工人和军队宣传队进驻各个大学. 华罗庚于 1969 年在《人民日报》上的文章是宣传队对他正规的“交心”谈话的直接结果，也揭示了他采取的立场.

1966 年红卫兵的冲击

文化革命于 1966 年 5 月完全开展，当时北京的红卫兵在各中学和大学贴出大字报，并组织群众大会围攻那些在党内和学校行政部门掌握权力的“资产阶级叛徒和修正主义分子”. 考试制度的反民主的方面作为制造培养脱离民众的贵族受到批判，中国过去和其他国家的文化传统影响被诋毁. 被红卫兵谴责并宣告为“四旧”的，是指资产阶级和一切剥削阶级的旧思想、旧文化、

旧传统和旧习惯．红卫兵似乎反对建立所有的教育标准，并相信很快取消旧标准，每个个人将开始自己安排自己的一生事业．

中共中央和国务院6月13日发出通知，大学和高中的入学工作，将延期六个月，以便“完全改革考试制度”，并“制定新的入学方法”（见北京周报，1966．6．24，第3页）．教育继续中断，而学校成了游斗被免职的权威的地方．红卫兵发动对“公开”和“暗藏资产阶级代表人物”的进攻．许多权威抵制他们，包括华罗庚在内．他写道：“在文化革命开始，我觉得群众批判我是多此一举，我不能接受”（中国建设，1969，11）．那些被谴责的对象，想方设法去阻止红卫兵运动，一些老革命不屈服，质问学生们有什么权利游斗他们．“造反有理！”学生们反驳说．他们有毛泽东的鼓励，毛泽东支持他们蔑视并“揪出”他们的老师（中国伟大的无产阶级文化革命，No．10（Peking：Foreign Languages Press，1967）（English））．

1966年8月18日在首都开始了第一次大规模的红卫兵集会，毛泽东接见了一千一百万“革命学生、教师和红卫兵”，他号召“建立革命联系”和“交流革命经验”（北京周报，1966，12，2，第6页）．第一个被推翻的是北京市委和北京大学行政机构，红卫兵有能力推倒教育系统的掌权者，但在这个过程中建立了大量错综复杂的派系组织，他们都声称忠于毛主席．他们通过大字报和大辩论开展残酷的斗争，常常涉及复杂的问题，不仅有对外政策，同时也有若干年前在各种运动期间政府官员的品行．强制的管理禁令使得任何外国报道只能依赖大字报的内容和他们敏感性的小道消息．红卫兵也冲进军械库夺取武器，结果派别之间的战争打起来了．这种斗争似乎在1967年两极化为红旗兵团和东风红卫兵团之间的拉锯战．他们都在全国寻求门徒，通过在北京游说和在各省设立联络站，传播小道新闻，扩大影响并进行比赛．1967年1月这种阵线已很广泛，“革命造反派”的组成已从超龄的中学生推向工厂、机关和其他生产单位．

红卫兵官方发动者是共产党中央文化革命小组，它是由紧跟

毛泽东的领导人物组成的．本书将提到两人：其一是毛泽东的妻子江青；另一个是姚文元，1966年夏天之前，他是上海市共产党委员会中相对小的官员，他握住自己的锐利笔杆成为严励的文化革命理论家．文革小组极大地独立于党中央，在它下面形成一个国家网，去帮助各红卫兵派别，其中人民解放军起了重要的作用．指导文革的方针仅在事后提出．中共中央十一届全会于1966年8月1日到12日召开．全会通过了十六条决定，这是文革第一个党的官方文件．第12条说：

至于科学家、技术员和普通劳动者，长期以来，他们是爱国的、积极工作的、不反党反社会主义的和里通外国的，现阶段我们继续采取"团结、批评、团结"的政策．特别关心那些做出过贡献的科学家和科技人员、努力帮助他们逐步改造他的世界观和工作作风（见北京周报，1966，8.12，第10页）．

很清楚，第12条适用于个人而不是单位．1966年9月是中国科学院在那个时代还在运转的最后 一个月．它的刊物直到1966年夏天还正常出版，但随后一直中断．中国科学院小图书出版中断更早，而且同样不能恢复（直到1972年4月）．由于文革，中国没有别的出版社出版物理科学的专业书籍和刊物（包括数学、物理、化学和其他相关专业）．中国数学学报双月刊包含封底英文目录，1966年照常出了头两期，到282页．在第三期的开头出现了两篇从《解放军报》转载的社论："高举毛泽东思想红旗，积极参加伟大的无产阶级文化革命"（1966年4月18日）和"千万不要忘记阶级斗争"（1966年5月4日），同时，姚文元发表了（原登在上海《文汇报》上，1966年5月10日）文化革命的关键性批判文章"'燕山夜话'和'三家村札记'的反动本性"．这三篇文章从第1页开始占据了许多页，然后才是数学文章（第283—424页）；这样，社论和姚的文章很清楚地与数学内容区分开来．英文目录被省略，成为空白封底．数学学报的第4期和最后一期有两篇转载《人民日报》的社论，那是6月1日和6月2日的．这些社论与前期对照，页码从第425页开

始，封底里面的英文目录恢复．这样，争论的文章被完全收编掺合到《数学学报》里了．

高教部于 1966 年 9 月 20 日颁布命令：在中国的全部外国留学生，限在 15 日内离开中国．交换学生的计划尚未终止的，自即日起终止，已建立的外国科技联系的安排被搞乱了．从 1966 年以后，只有少数几个科学家访问了中国．其中之一是英国牛津大学拓扑学家詹姆斯（Ioan James）代表皇家学会于 1966 年 2—9 月间来到中国．詹姆斯教授没有见到华罗庚，也未听到关于华罗庚的任何情况，但是他见到科学院其他全部数学家，当中包括吴文俊，当时吴文俊也在这个领域里工作．他告诉我根据他所知 1966—1969 年间，没有别的数学家访问过中国．直到 1971 年夏天，多伦多（Toronto）大学著名泛函分析学家戴维斯（Chandler Davis）访问了中国，曾受到中国科学院一批知名数学家的热情接待，其中包括华罗庚在内．

1966 年 8 月 6 日—16 日在莫斯科召开四年一度的国际数学家大会，有四千多名数学家参加，是历届最具代表性的一次集会．北越派出了以几何学家 Ngugen Canh Toan 为首的强大代表团参加了大会，北朝鲜也派了代表团，但没有中国数学家参加．中国也没参加 1970 年 8 月在法国尼斯举行的下一届国际数学大会．

正如其他科学发达国家的预料的那样，在中国，许多科研人员和教师，当他们被卷入“文化革命”的时候，也正是他们在大学和在科学院研究所处于积极从事学术活动的时候，假如他们的科学活动还能跟其他国家的学术同行一样——过去证明是一样的，那么可以肯定，他们一定会完成他们的科研任务．可是，至少从表面上看，他们的学术讨论班，论文的出版以及同学生和同事之间的学术接触中断了．很难想象，他们又如何去继续从事他们以前的事业．

从 1967 年开始的大联合的努力

1967 年中期，在红卫兵骚乱中开始努力去统一国家并重建

教育制度，一种新的组织形式被引进，用以代替党和国家的旧的机构，“三结合”的联合形式出现，它是由①解放军，②革命干部——先前党和“工人阶级”的干部，③红卫兵和革命造反派和非党组织的“革命群众”代表组成的．促进每省的三结合的联合替代原省政府并承担所有学校、工厂和农村的行政领导是一个重要的目标．第一个省级三结合的联合，称作革命委员会，说是“临时的权力机构”，在1967年1月成立，最后两个省级大联合到1968年9月才成立．

科学院和它的各研究所的红卫兵斗争的状况，导至了1967年7月14日《人民日报》的评论，因为“偏离了斗争的大方向”，在科学院“革命群众组织”之间的强烈的“内战”持续了20多天．进一步的细节没有报道．科学院革命委员会的形成被看作一个相当重要的事件．它的荣耀在于周恩来总理的出席，据北京广播电台1967年8月2日报道，出席7月30日新的革命委员会成立庆祝会的，还有郭沫若和领导国家科委的副总理聂荣臻，人民解放军总政治部主任肖华和国防部副部长粟裕．这暗示着中国科学院有意味深长的军事的重要性．周恩来总理在讲话中说：

党内一小撮走资本主义道路的当权派现在已经被揪出来打倒了……革命委员会现在成立了．这意味着中国科学院将变成一所红彤彤的毛泽东思想大学校，它将紧跟毛主席指引的方向去努力攀登并超越世界科学和技术的水平，进入世界科学技术最先进的行列．

科学院革命委员会联合起来的三股力量的本质东西，不为人所知，但像华罗庚这样原研究所所长的名字没出现在庆典报导上．在这个期间的任何官方媒介中明显地不提到华罗庚，这并不说明在科学院重建期间他什么作用也没有．我从 Chandler Davis 那里得知，华罗庚最终恢复了他在科学院的主要职务．1971年，Davis 作为少数几个数学家之一，从首都到各研究所访问的时候，华罗庚再一次协调中国数学的活动和沟通庞大的各分支的联系．

自然，有一些红卫兵报涉及华罗庚的人身攻击的报道还存在，其中之一是台湾国际事务研究所出版的“真相与特写”，它写道：“据最近红卫兵报报道，中国数学家华罗庚遭受‘北航红旗战斗兵团’的残酷斗争，这是一个受江青指挥的红卫兵组织”．北航是北京航空学院的俗称，它的红旗战斗兵团是红旗派的一部分，以出版“红旗”红卫兵报而出名，发行到上海和更远处所属的联络站．日本记者从北京报道，从文化革命的高度上看，红旗战斗兵团是与江青联系的红卫兵组织中“极左”的一个．“真相与特写”上由北航红卫兵组织搞的远在30年代华罗庚的活动的一张表，虽在暗示，但语言含糊．我试图获取“北航红旗”报的复印件，但没成功．我推测“真相与特写”自己也没有复印件．“真相与特写”文章的表达法（“据最近红卫兵报……”），这似乎暗示华罗庚被批判之事是摘自某些红卫兵报．在缺乏其他证据情况下，欧洲新闻机构的记者引用了数学所红卫兵贴的大字报，匆匆忙忙发送的一两个关于华罗庚在1966—1967的经历的评论是依据不充分的．华罗庚自己承认他受到红卫兵“尖锐的批评”和“触心的震动”，但是，深层的全面描述还很不清楚．

工军宣队和华罗庚

经过早期红卫兵的清洗，教育系统充满了虚无状态，大学里形成了三结合接管权力的机构，但遭到强烈的反对．1968年7月21日毛泽东发出指示，赞扬上海机床厂——一个生产精密磨床的大厂，从工人中培养自己技术人员的做法：

大学还是要办的，这里我指的主要是理工科大学还要办，但是，学制要缩短，教育要革命，要执行无产阶级的政策，走上海机床厂从工人中培养技术人员的道路，要从有实践经验的工人、农民中选拔学生，到学校学习几年后再回到生产实践中去（人民日报，1968，7，22）．

上海机床厂马上改成了“不仅是工厂，也是学校和科研单位”的科学与技术大学．它的教学秩序将是由有“高度无产阶级政治觉悟和实践经验的工人，有实践经验的工人和农民学生和革

命的知识分子”组成的三结合机制管理．整个过程专职教员的主要作用在于安排“在学校、工厂和科研单位之间有机联系，以便帮助学生把他们的实践经验提高到理论水平上，然后再应用于实践”（北京周报，1968，8，2）．

毛泽东的紧密联系研究和生产的教育计划，可以预料是很难实现的，贯彻到其他文革单位也一样．一周以后，1968 年 7 月 27 日，由“产业工人和军人”组成的宣传队进驻清华大学．宣传队彻底打破了“资产阶级知识分子的统治”，“在上层建筑领域登上了斗、批、改的政治舞台”（中国建设，1969，11，第 31 页）．虽然华罗庚没有提及红卫兵在清华的暴力，工人和解放军的介入至少指导了一部分学生．记者 Norman Webster 两年后访问那里，他报道在红卫兵撵走清华教授和行政官员后，他们分裂成战争的两大“帮派”．Webster 描述说，为了阻止两派流血内战，有三万驻军和北京工厂工人进入清华．周恩来对美国访问学者说在清华内战中有七、八百人受伤（Toronto Globe and Mail, Jane 16; 1971．和 Pacific News Service, San Francisco, July 19, 1971）．一直到 1969 年 2 月 25 日，清华革委会才成立（见 NC-NA, Jan., 29, 1969）．同年晚些时候，清华工军宣队被调往北大，那是一所“阶级斗争极其尖锐复杂”的大学（NCNA, Oct., 6, 1969）．北大革委会到 1969 年 9 月才成立．

当 1968 年 8 月工军宣队进驻中国科技大学时，华罗庚写道：

他们组织教员和学生活学活用毛主席著作，并帮助他们用毛主席思想做为教育革命的武器，进行革命大批判．

工军宣队队员们……执行党的知识分子政策，对他们中的大部分人采取团结、教育、改造的方针，对革命的和爱国的知识分子，他们既不歧视，也不“等待和观望”，而是一开始就友好、热情、耐心地帮助我们，团结我们……他们既看到我们的短处，也肯定我们的某些思想进步，他们对我们思想的形成做了历史的和社会的具体分析（中国建设，1969，11，第 31 页）．工军宣队在同华罗庚的经常性同志式的“交心”过程中，能够对他解释红

卫兵为什么要造反，他们的造反为什么对知识分子有好处，谈及红卫兵：

他们用他们尖锐的批评，救了许多像我这样做了严重错事的知识分子……那是出于对我真正的关心和爱，红卫兵给我一个好的激励．假如他们让我错误思想继续发展下去的话，很难想象我将会变成什么样子，他们最终引导我往正确方向去思考问题，我感到很幸福．

华罗庚对宣传队写的材料是唯一的．如果不是仅有，恐怕也是极少数中的一个，国际广播电台广播了一个有名望的中国知识分子赞同毛泽东“7·21”教育革命路线．

1969年6月8日，华罗庚在北京《人民日报》上首先发表自我批评，题为“重新学习，为教育革命献力量”．他的内容是参加“在工人阶级领导下”重建大学的辩论．大幅度修改大学数学的全部课程，决定取消至今最不可缺的内容，如 ε-δ 语言对新生微积分的训练，代之以相对简单乐见的、对现实生产实际最有用的东西．华罗庚的文章被新闻媒介做为谴责必需荡涤的旧事物的理由，加以广泛传播．《中国建设》把它改编成特辑，题为“毛主席为我指明了前进的方向”，香港两家爱国报纸《文汇报》和《大公报》，特别刊登了华罗庚6月8日的文章和《中国建设》的文章的中译本．

让我们首先考虑这样一点，对于这些出版物的读者来说，华罗庚的身份问题，与原来的实践相反，在以前四个引证的文章中没有一个提及科学院数学所．在1961年8月，当介绍华罗庚在农业方面的运筹学研究时，《中国建设》称他是数学所的所长；然而，在1969年同一个刊物仅认定他是一位“著名的数学家，中国科技大学的教授”．在中国的学术的传统体制中，“教授”的称呼早在1966年前就已经中断使用了，这里的教授头衔也许是为了尊敬．《人民日报》和香港《文汇报》处理这个问题更为简单，用中国文字“华罗庚，中国科技大学”印刷．《大公报》学《中国建设》文章的英文版，不采用这个标识，去掉所有标识华

罗庚的称呼. 这种删节（像我们看到的）做为新闻难题是没有必要的，华罗庚在中国早就是传奇性的人物. 但是没有进一步的证据说明在写作的时候，华罗庚不是正式的教授头衔.

现在我们转向华罗庚的思想的自我描述上，在《中国建设》上，他说他是一个“生长在旧社会、受旧思想影响很深”的知识分子，但是现在他已经认识到“被训练为资产阶级服务的知识分子，绝不会同无产阶级同心同德……除非他完全改变资产阶级的世界观”. 因此，他明确表明教育改革的一个基本问题是：“怎样能使老的知识分子全心全意为无产阶级服务?”这是一个不平常的问题，因为直到1963年中科院数理化学部委员（相当于苏联的院士）绝大多数是在国外培养的. 他们都是被培养为资产阶级服务的. 这样，解放后20多年，在华罗庚眼里，改造是成功的，他们统统被改造成中国的科技领导者.

但是，这20年怎么说呢? 假如直到文革开始，旧资产阶级社会持续不变的话，华罗庚的文章抹煞了人民政府的许多成就，并且似乎也抹煞了他自己在解放后中国数学航程中的工作. 对1966年前的发展的总结，由他在下面的话得到更清楚的确认：

在这条修正主义路线下，学校（指中国科学技术大学）实际上是在培养资产阶级学者和权威的接班人，使年轻人脱离无产阶级政治、脱离实际、脱离群众. 而我自己闭门埋头于研究和教学40年之久，成了这条路线的牺牲品，成了个人奋斗成名成家的活榜样，成了毒害年轻一代的活工具. 正是这种想法使我充满了深深的内疚.

西方数学家也明白表示是“闭门”搞研究的，或称象牙塔型的研究，而且他们中许多人内心深处是窘迫的，或者甚至对他们的职业脱离生产和社会生活而内疚. 但是，所谓“闭门”行为不正是华罗庚的科研生活吗! 众所周知，1949年以前华罗庚在英国、苏联、美国生活和工作过. 在返回中国的最初几年，他继续广泛访问世界许多地方. 他代表中国到斯堪的纳维亚、东欧、苏联和印度参加许多重要会议. 总之，在这些年中，他是最具国际

性的中国人之一．现在他几乎没有参加学者国际社团和反战会议．我已能认识到一些关于华罗庚的话，不仅说明关心他的同事和学生，而且关心全体人民．人们一定会有这样的问题：是什么原因促使像华罗庚这样有社会主义思想的人，20 年闭门为国民党工作；20 年闭门与共产党合作？

华罗庚 1931—1936 和 1950—1951 在清华大学时，科研与教学之间没有任何本质区别．至少有三次全国性政治运动触及中国知识界并卷入尖锐的批评和自我批评斗争之中．我们概要地提一下，那是发生在 1951—1952 年间、1957 年和 1964—1965 年间．长期看《人民日报》的读者记得华罗庚卷入了这些运动，并且也知道在麦收和大跃进期间开始的各种项目中，华罗庚尽力应用数学方法为社会主义建设服务，以及华罗庚如何深入到建设工地为工业工作六个月．在文革期间，那是可以想到的，着重于像华罗庚那样的，过去不太改造自己资产阶级世界观，又曾被允许仅有限地参加思想改造和整风运动的知识分子，这些知识分子总是逃避真正清除掉自己过去的东西．他们也总被激励去从事应用工作．很难猜测他们每个人是如何坚持 20 年"闭门"的经历．

解放后，华罗庚做出了多个领域的、最好的数学成果，教育和培养了许多杰出的学生．为此，中国的工人、农民、士兵给了他很高的物资或精神的奖赏．在贴上"反革命修正主义路线"标签的路线斗争中，华罗庚选择的立场，上了刘少奇的当．但那是全党都接受和认可的．确实，在 1957 年党内领导者出现的严重分歧是无产阶级革命和资本主义复辟两种势力之间的斗争呢？还是两种建设社会主义的策略的分歧呢？苏联斯大林时代的不幸斗争，再现于文革的整个争斗过程．

尽管驻在中国科技大学的工军宣队说华罗庚揭发了"无数震惊的事实"，批判刘少奇及其在教育界的代理人．实际上，在《人民日报》和《中国建设》上，只找到两个"事实"．其一是关于中国科技大学的：

他们（刘少奇的代理人）宣称，中国科技大学的目标是培养

具有最新和最先进科学技术的干部. 鼓吹“白专”道路，他们引导学生集中精力于专业教育而不关心政治.

换句话说，抨击的是聂荣臻1958年9月为中国科技大学制定的战略目标. 但是从聂荣臻的口号去推断在“很短的几年内”把中国技术提高到世界水平不是不合理的. 由于鼓励学生超越专家和致力于“候补科学家”，形成新的杰出的科技人才，从一开始就是不可避免的. 因此，不能完全责怪于刘少奇的教育路线.

另一个“震动性的事实”是关于数学竞赛：

我组织数学竞赛，作为国外引进的“先进经验”推广到全国. 这样，实际上是真正公开号召年轻人，通过仅仅专注于技术知识为个人名利奋斗.

然而，我们早就看到，华罗庚1956年在《中国青年》上，尽力强调学科学的学生必须有独立思考和创造性思维. 他还批评死背死记包括学校考试中过高标准与刻板陈规的问题；同时竞赛会很好地鼓励个人成就，他们严格的与创造性的学习方法未必是仅仅为了成名.

非常清楚，自1969年后华罗庚远离文化革命政治造成的毁坏，最终提高了他作为改变中国教育政策的倡导者的形象. 显然这样的政策不完全适应他的同事和学生的数学创造力. 就整体而言，不论在中国内部的后果，还是对世界科学和文化都是一个损失. 这个损失对我们所有的人都是巨大的. 作者相信，甚至华罗庚本人也会同意这一点.

附 录 Ⅲ

华罗庚形成中国的数学

——华罗庚是一个奇才，以他的研究以及致力于数学大众化而著名.

柯拉达*

数学，如音乐一样，以奇才辈出而著称，这些人即便没有受过正规的教育也才华横溢. 虽然华罗庚谦逊地避免使用奇才这个词，但它却恰当地描述了这位杰出的中国数学家. 华罗庚一直没有得过任何学位（直到去年才由法国 Nancy 大学授予名誉博士学位），然而他却成了数学界的大人物. 他在有声誉的刊物上发表了 150 篇文章，写了九本书. Columbia 大学的数学家 Lipman Bers 说："他绝对是第一流的数学家，他是极有天赋的人."

华罗庚还由于他致力于数学大众化而著名. 在文化革命正要开始之前以及在其间的 1966—1976 年期间，他旅行全中国，教工人们如何用数学去解决实际问题. 那阵子他对大量的人演讲，吸引了大批群众听他的数学报告.

华罗庚在华盛顿旅馆的房间里对《科学》杂志的记者漫谈他的数学家生涯时，说话温和，气宇轩昂，看起来不像 70 岁的人. 他要在美国访问八个星期，接受了去 22 个大学作报告的邀请. 陪同他的有：他的媳妇柯小英，一个心脏病专家，是他的官方医

---

* 见 G. B. Koleta, Hua Loo-keng Shapes Chinese Math., a Prodigy, Hua is Known for His Research and for His Efforts at Popularizing Math., Science, 210 (1980), 413. 414. 金坚译.

师；那吉生，一个职业数学家，是他从前的学生.

华罗庚大概以他在数论方面的工作，特别是对 Waring 问题的贡献最为著名. 经典的 Waring 问题是设法把任何整数表为若干个数的方幂之和. 此问题由德国数学家 D. Hilbert 解决了，但其后华罗庚接着搞一个更困难的问题. 这个新问题是：把任一整数表为若干个素数的方幂之和. 据 Illinois 大学的 Paul T. Bateman 说，这个问题"远没有完全弄清楚". 但是 40 年代华罗庚就证明了任一充分大的整数 n 均可表为 $[6n^2\log n]$ 个素数方幂之和*. Illinois 大学的 Heini Halberstam 说，这个结果"从整体来看是我们最好的结果."

Halberstam 正在编辑华罗庚论文集，将由德国的 Springer 出版社出版**. 他指出，华罗庚之所以令人印象深刻，原因之一是他的研究工作涉及范围非常广泛的学科，包括多复变函数论、偏微分方程以及数值分析. 虽然近年来华罗庚把大部分的精力用来普及数学，他仍然继续作了一些有意思的理论工作. 例如，华罗庚与北京的中国科学院的王元一起提出一个估计多重积分的有效的数论方法. Halberstam 说，"这个方法看来是大有可为的，在原理上是很精密的."

华罗庚说，他的生涯分别有"三个困难时期，"使他很难从事数学工作. 他说，第一个困难时期是他的青少年时代. 华罗庚生于上海附近一个小村庄的贫苦家庭里，但他设法得到九年的正规教育. 他 15 岁开始在他父亲的小店里工作. 他解释说，"你们美国人不会了解那个店有多小，我们卖香烟是一枝一枝卖的." 在 18 岁时，他在原来上的那所初级中学里找到一个文书工作，薪金每月 18 元，华罗庚说，这不到 10 美元，是十分低的，但比他父亲那个小店的薪金好多了. 这时候他结婚了. 19 岁他得了伤寒病，接着又是关节炎，结果他的腿瘸了.

---

* 这里的 $6n^2\log n$ 原文是 $6n2\log n$. ——译注

** Halberstam 是 Springer 出版社的总编辑 .——译注

华罗庚在他父亲的商店工作以及在学校工作的时候，开始自学数学．在他居住的小镇中只有三本数学书可用——一本代数、一本几何以及一本 50 页的微积分．他读了这些书，超过了它们，不久便在中国的刊物上发表论文．北平清华大学算学系主任熊庆来注意到华罗庚的文章，开始查询；他以为华罗庚是在国外受教育的，但归国留学生联合会从未听过说他．后来一位教授告诉熊庆来说，华罗庚不过是一所初级中学的文书，他和华罗庚是同乡．

熊庆来对华罗庚念念不忘，竟然亲自邀请他到清华大学去．他不能聘请华罗庚任助教，因为他不是大学毕业的．但华罗庚得到一个秘书工作，这有助于应付开销．可是没过一年半，清华大学破例请华罗庚作助教，这是他第一个困难时期结束的标志．

在清华大学期间，华罗庚继续做他的研究，开始把论文寄到西方国家的刊物．这些论文中许多被退回来，因为他连续发现了著名的已知结果，例如柯西定理与黎曼定理等．华罗庚说："我感到扫兴，因为我老是重复别人的工作，但我同时感到，如果大数学家能够发现这些结果，我也就能发现，并能由此继续前进．"

在清华大学工作几年之后，华罗庚得到中国文化基金会的资助去剑桥大学学习．于是他 25 岁离开家中的妻子与三个小孩，启程去英国，初次领略到一个伟大的数学中心的生活．华罗庚早先发表的那些论文，使他在西方国家有了名气；他到达剑桥时看到杰出的数学家 G. S. Hardy 留下的便条说，他过两年可望得到学位．对此华罗庚回答说："我是来学习的，不是来考学位的．"他从未登记考学位，但他在剑桥的两年期间发表了十多篇数论方面的论文．数论是剑桥的数学家特别驰名的领域．

1937 年日本侵略中国，华罗庚从剑桥回国．在云南省西南联大任教授．这个大学是由清华、北京、燕京三个大学余下来的人组成的，这三个大学的教授们丢下了他们的图书馆与研究设备，逃到中国的内地，重新组成这所新大学．

中日战争标志着华罗庚生命的第二个困难时期，他说，"研

究工作几乎停顿，生活非常困难.”他与外边的学术界隔绝，没法得到数学刊物. 物价极度飞涨，他和大多数中国人一样，感到难以养家糊口. 然而，就在这个时期，他仍然写了20多篇论文，完成了他的第一本书《堆垒素数论》，至今仍是有价值的.

1946年，同日本的战争已经结束，华罗庚接受了访问Princeton高等研究院的邀请，在Princeton工作两年之后，华罗庚到Illinois大学，在那里华罗庚给好几个年轻的数学家留下了难忘的印象. 他从前的一个学生，Pennsylvania州立大学的Raymond Ayoub说，华罗庚“是一个充满思想与创建的人，和他一起工作是十分愉快的.”

1950年中国共产党得到政权，华罗庚回到中国，任北京的数学研究所所长. 华罗庚说，“这是一个好时期，我的学生都是很突出的，我在那里写了许多书和论文.”

50年代末，华罗庚开始关心数学大众化的问题，他举出理由说，“中国最主要的事情是提高生活水平，”作为一个纯粹数学家，他感到能够提供的帮助仅是间接的，然而他有搞应用数学的理论基础，能够教中国人如何用数学来解决实际问题. 1960年开始，包括文化革命的几年在内，15年间他全心全意地对群众传授数学知识，访问过中国的30个省中的23个，到过无数的工厂.

华罗庚十分仔细地考虑过如何使数学大众化的问题，“专家与工人并不总是有共同的语言，这一点是最难克服的，”他的策略是首先解决一个实际问题. 例如，熟练工人平衡一个磨轮可能要花两个小时，不熟练的工人可能要花几天. 华罗庚说，“如果他们正在为使轮子平衡而发愁的时候，你却努力教他们微积分或者无穷维空间，他们是不感兴趣的. 但是如果我能告诉他们在几分钟内就能使轮子平衡的办法，他们便会成为我们的朋友.”于是，把工人们的问题解决以后，就打开了向他们传授理论和方法的大门.

华罗庚回忆说，他第一次到工厂时，工人们对他是敬而远之

的．“他们总是向我行礼，叫我华教授或者华所长（因为他是数学研究所所长）．我在那里住下来之后，他们发觉我有用了，于是改口叫我老华”．这是一种亲密的称呼，同时也包含着尊敬．

作为一个例子，华罗庚讲了一个制造防冻剂的故事，来说明他如何得到工人们的拥护．一群工人花了六个月，试验了137种不同的化学配方来制造一种防冻剂．最后，他们断定得到了最好的化学配方，能够使油的冰点达到－37℃．华罗庚访问这家工厂时，要了实验的记录，他立刻认识到防冻问题是一个线性规划问题，不到30分钟，他提出了一个新的化学配方．

后来，工人们告诉华罗庚，他们不需要再试验他的配方，因为他们认为已经穷尽了所有的可能性，但他们决定姑且试试看吧，理由是：如果这个配方无效，华罗庚也许就会认识到，他不能改进他们的工作了．他们试验了华罗庚的配方，把油的冰点降低到－42℃．华罗庚回忆道："我们在那里得到很好的声誉，整个工厂，然后是整个城市都转向我们．"

然而，华罗庚的数学研究在文化革命中却受到妨碍，他普及数学的倡议遭到攻击．有人说，他旅行各省只是为了游山玩水，华罗庚说，文革之后，他的朋友为他辩护说，“这些（批评）是无知的．难道他们不知华罗庚腿瘸不能爬山吗？为什么他夏天去南方而冬天去北方呢？”华罗庚和大多数中国人一样，觉得文化革命期间的生活是极端困难的，他把这段时期叫做他的第三个困难时期．

但是，尽管有困难，华罗庚仍然暗中搞数学研究，他带着10个到20个助手一起旅行，他们都是他从前的学生，他在深夜的时候和他们一起讨论数学．

经过所有这些努力，华罗庚终于在西方世界驰名，也对中国数学产生巨大的影响．贝尔电话公司的Ronald Graham是华罗庚这次美国之行的主人之一，他说，“他比起历史上任何一位数学家来，受他直接影响的人可能更多，他善于推销数学，”Princeton高等研究院的Atle Selberg深思熟虑地说，要是华罗庚像他的

许多同胞那样，在第二次世界大战之后仍然留在美国的话，“毫无疑问，他本来会对数学作出更多的贡献的，另一方面，我认为，他回国对中国数学也是十分重要的．很难想象，如果他不曾回国，中国数学会怎么样．”

附 录 Ⅳ

华 罗 庚

哈贝尔斯坦*

华罗庚和他的同代人中最优秀的中国数学家陈省身一起都是他们这个时代的领袖数学家．他的绝大部分工作生命是在中国渡过的，如果有许多中国数学家现在在科学的新域中作出特殊的贡献；如果数学在中国享有异常的普遍尊重，那就要归功于作为学者与教师的华罗庚50年来对他国家的数学事业所作的领导．

按照他成为Illinois大学教师时提交的个人经历．华罗庚于1910年11月12日出生于中国江苏省南部的金坛县，他的父亲开一个小杂货店，由于太穷，所以不能供他读完中学．他帮助他的父亲管理了一个时期小店，然后进入一个两年制的会计学校来继续其学习．从这时开始，他即刻苦攻读数学，直到他的一篇关于方程式论的文章引起了一位独具慧眼的教授的赏识，并将华罗庚介绍到北京工作．开始时，华罗庚在清华大学图书馆任职员，从1931年起，他改任数学系助理．他的第一篇论文是1929年发表的，以后接着很快发表了六、七篇文章．于1932年9月升任数学系助教．1934年9月他晋升为讲师．他珍惜光阴，作出许多实质性贡献，从而不受其出身的影响而得到了提升．1934年以后，华罗庚的论文已经明确地标志着他已是一个职业的数学家

---

* 见 H. Halberstam, LOO-KENG HUA: Obituary, Acta Arich; 1988.

本文末附的华罗庚的论文与专著目录均取自“华罗庚文选（斯普林格1982）．经斯普林格出版社友好的许诺，本文从该书中录用了部分详细讨论华罗庚数学工作的文章．王元译，李培信校．

了.

Norbert Wiener 1935 年访问了中国，他很欣赏华罗庚（注意华罗庚的论文“复域中的 L′中的 Fourier 变换”）. 向 G. H. Hardy 作了很强的推荐. 华罗庚于 1936 年抵达英国剑桥大学，在那时他渡过了有决定意义的两年，那时他已经是中国文化基金会研究员，他已正式发表了关于 Waring 问题的论文并从进人 Hardy-Littlewood 学派而得益. 他在剑桥期间至少发表了 15 篇论文，这充分证明了他非凡的才能与惊人的勤奋. 华罗庚是一个善于社交的人，他很快和英国许多年轻数学家间有了密切关系. 例如 Davenport，Estermann，Heilbronn，Offord，Rankin 及 Titchmarsh. 华罗庚喜欢回忆 Davenport 帮助他修改早年发表在伦敦数学会杂志上的论文的往事.

华罗庚可能盼望能在英国多留些时候，但 1938 年世界很快陷入动乱. 特别，日本于 1937 年侵人了中国. 华罗庚回国，在原校数学系中被聘为教授. 事实上，日本的侵人，使许多大学搬迁到云南省昆明市，并合并成西南联合大学. 1938 年至 1945 年，华罗庚都在那里工作. 那时肯定是艰苦的，但华罗庚的论文却源源不断，毫不减少. 到这个时期的末尾，华罗庚的兴趣已明显地扩大到代数与分析的一些部分，并作了巨大的贡献.

第二次世界大战之后，华罗庚接受了访问苏联的邀请，在 1945—1946 年间，他与 И. M. Виноградов 一起渡过了富有成果的几个月，他将 Виноградов 关于三角和的方法归结为一个中值公式的重要贡献就是在这个时期作出的. 他的有影响的专著“堆垒素数论”亦是首先用俄文发表的，华罗庚于 20 世纪 50 年代初又一次短暂地访问了苏联，他告诉我他已被提名授予斯大林奖金. 由于斯大林逝世而未能被授予，以后的政治发展，使他感到失去这次机会是非常幸运的.

从 1947 到 1948 年他是 Princeton 高等研究院的访问学者，1948 至 1950 年他为位于 Urbana-Champaign 的 Illinois 大学的教授，尽管他在 Illinois 的时间是短暂的，他仍负责将一些重要的

教师介绍到数学系来，如 P. T. Bateman，Irma 和 Irving Reiner. 他指导几个学生做研究，他们从而成为职业的数学家，如 R. Ayoub，Josephine Mitchell，L. Schoenfeld. 尽管这个时候（实际上，他的终生），他仍继续研究数论，但他已完全涉足于数学的其他领域：矩阵几何学、有限域上不定方程论及辛群的自同构等.

1950 年，华罗庚最终返回了中国，从事于重建中国科学院数学研究所的工作，他于 1952 年被任命为所长，在他创作的最高峰离开繁荣的美国数学界，对他来说无疑是一个损伤——在较晚时，他给我的一封信中，他说 40 岁是“我生命的黄金年代”，但当他的国家召唤他回国时，他毫不迟疑. 事实上，回到中国并没有影响他继续高产，亦没有妨碍他继续扩大其兴趣. 而且他发表的作品还有所增加，因为他这时正投身于指导与训练研究生（研究数论的有陈景润、潘承洞与王元，研究代数的有万哲先，研究分析的有龚昇与陆启铿），为了他们能够受益及在中国普及数学，他投身于撰写一系列内容充实的书，特别有价值的是他的《多个复变数典型域上的调和分析》（1963 年美国数学会译成英文出版，现在仍在继续印刷发行）. 他的这本已成为经典著作的书得到了自然科学一等奖，同年，他的巨著《数论导引》出版了，这本书已被译成英文出版. 在初版很快售完后，Springer 出版社正在再版. 1959 年他出版了《科学百科全书》的专条《指数和的估计及其在数论中的应用》（德文）. 在 1963 年，他与万哲先合作用中文出版了系统总结性的著作《典型群》. 晚近，他与王元于 1978 发表了他们的《数论在近似分析中的应用》（英文译本，科学出版社与 Springer 出版社，1981）. 我相信，王元教授最近已编辑了华罗庚科普著作的中文版. 现在，我们仅从他在 1980 年在 Berkeley 数学教育会议上的全会报告的英文讲稿中略知其梗概（Birkhäuser 出版社，1983）. 他亦对安徽合肥的中国科学技术大学的发展作出了贡献，他是该校副校长，中国政府在其工业化过程中，不断加多地要求华罗庚给予咨询，华罗庚和一

个科学家组成的小分队跑遍中国各地向工人讲述如何将科学知识用于大量的日常问题．在车间的集会或工厂的露天集会上，他向工人群众讲述数学的用场，全世界没有一个数学家曾经像他这样做过．他的仪表堂堂，和蔼亲切，而且有将事理加以简化的惊人天才．从而他成为他的人民的教师与民族英雄．当华罗庚于1984年在杭州组织多个复变函数论会议时，西方同行对他在中国的知名度甚感惊讶．他70高龄在国外访问时，各种政治信仰的中国血统的人都群集拜访他，向他致意或表示乐于尽力为他服务之意．

在"文化革命"的年月里，华罗庚实际上处于困难的境地．他将其境遇归于毛泽东对他的个人保护，尽管如此，他仍遭到不断攻击，他的许多手稿被查抄了，并均丢失了，还迫使华罗庚的朋友们来攻击他．

在"解冻"后不久，华罗庚被允许于1980年接受Livingston教授的邀请访问英国Birmingham，作为英国科学研究委员会的高级研究员访问一年．从而开始了华罗庚生命的最后阶段．在中国，他被任命为科学院副院长及人大代表，仍为政府的科学顾问．而现在又是联系西方学术界的文化大使，他访问了法国，西德、日本与美国．在1983—1984，他为California Institute of Technology的Sherman Fairchild Distinguished Scholar．他已经很疲倦，而且健康很差，但他仍对生命抱有乐观．他继续在数学及其应用方面工作，直至最终．他在Urbana的最后一次讲演是1984年春天作的，在充满人群的讲演厅里讲授数学经济学．他给我的最后一封信的日期是1985年5月21日，他告诉我，他的绝大部分时间都在从事"非数学"活动，"这些工作对我的国家与人民是必需的"．他于1985年6月12日在东京作演讲时，由于心脏病发作而逝世．

他得到Nancy大学（1980），香港中文大学（1983）与Illnois大学（1984）授予的荣誉博士学位．他当选为美国科学院国外院士（1982），第三次世界科学院（1983）及德国巴伐利亚科

学院院士（1985）.

数学工作

下面将概述华罗庚的科学工作．第一节数论为王元在华罗庚文选中的文章的扩充．第二节与第三节分别取自同一本书中万哲先、龚昇与陆启铿撰写的文章．

数论

1. Waring 问题及其推广；指数和

1770 年，Waring 猜想（并非原话）对于每一整数 $k\geqslant 2$，皆存在一个仅依赖于 k 的整数 $s=s(k)$ 使每一个正整数 N 皆能表示为形式

$$N = x_1^k + \cdots + x_s^k, \tag{1}$$

此处 x_i（$1\leqslant i\leqslant s$）为非负整数．拉格朗日（Lagrange）于同年解决了 $k=2$ 时的情况．他证明了 $s(2)=4$（最佳结果）．猜想的一般情况，直到 1900 年才由 Hilbert 证明．如同数论通常情形一样，一个问题的解决立刻导致另一问题的形成，为了现在讨论的目的．我们将两个大问题列于下：

Ⅰ．决定将 N 表示为形式（1）的表示法的数目 $R_s^{(k)}(N)$ 的渐近公式，其中的 s 希望其愈小愈好．

Ⅱ．决定使（1）式对于所有充分大的 N 均成立的最小 s，即 $G(k)$.

显然问题Ⅰ的解决亦将给予问题Ⅱ某些结果：若当 $s\geqslant\widetilde{G}(k)$ 时，$R_s^k(N)$ 有一个渐近公式，则 $G(k)\leqslant\widetilde{G}(k)$.

1918 年，Hardy 与 Ramanujan 建议了一个方法来处理问题Ⅰ中 $k=2$ 的情况，由于这项工作的刺激，Hardy 与 Littlewood 于 1920 年开始了他们著名的整数分析系列论文，在其论文中他们发展了著名的“圆”法来处理问题Ⅰ中 $k\geqslant 3$ 的情况，半个世纪多以后，Ⅰ与Ⅱ均仍未得到解决.

从原则上讲解一个圆法是容易的，但其应用涉及一系列技巧

性的困难，需做的大量工作为指数和的估计．这些困难使指数和估计有其独立兴趣并且它在近代数论中占有本质影响．

命

$$T(a)=\sum_{x=1}^{P}\mathrm{e}(ax^k),\mathrm{e}(\theta)=\mathrm{e}^{2\pi i\theta}\text{ 及 }P=[N^{1/k}].$$

则

$$R_s^{(k)}(N)=\int_0^1 T(a)^s e(-Na)da.$$

(有限母函数 $T(a)$ 的应用来自 Виноградов 1928 年对圆法的简化）现在将区间 $[0,1]$ 分成两部分：U，包有诸有理点 a/q，$(a,q)=1$ 为中心的小区间，此处 q 比较小，通常称为"优"弧，及 m，即单位区间的其余部分，在每个优弧上，$T(a)$ 可以被一个已知函数很好地来逼近，从而当 s 充分大时，

$$\int_U T(a)^s e(-Na)da$$

$$=\frac{\Gamma\left(1+\frac{1}{k}\right)^s}{\Gamma(s/k)}N^{\frac{s}{k}-1}G_s(N)+o(N^{\frac{s}{k}-1}),\qquad(2)$$

此处奇异级数 $G_s(N)$ 由下式

$$G_s(N)=\sum_{q=1}^{\infty}\sum_{\substack{a=1\\(a,q)=1}}^{q}\left(q^{-1}\sum_{x=1}^{q}\mathrm{e}(ax^k/q)\right)^s e\left(\frac{-aN}{q}\right)\qquad(3)$$

定义，这将给出 $R_s^{(k)}(N)$ 的渐近公式的首项，只要我们能证明当 s 充分大时有

$$G_s(N)\gg 1,\qquad(4)$$

$$\left|\int_m T(a)^s e(-Na)\mathrm{d}a\right|\leqslant\int_m|T(a)|^s\mathrm{d}a=o(N^{s/k-1}),\qquad(5)$$

显然这两部分都需要估计指数和，值得高兴的是，1916 年 Weyl 在他关于数列一致分布的著名论文中提供这个关键结果：命 $f(x)=a_0x^k+a_1x^{k-1}+\cdots+a_k$，此处 $a_0,\cdots,a_k$ 为实数及 $\left|a_0-\frac{a}{q}\right|\leqslant q^{-2},(a,q)=1$，则 Weyl 证明了

$$\sum_{x=1}^{Q} e(f(x)) \ll Q^{1+\epsilon}(q^{-1} + Q^{-1} + qQ^{-k})^{2^{1-k}}. \qquad (6)$$

仅用这个不等式，只要 s 大于充分大的 s_0（k），Hilbert 定理就能够被证明.

经典框架的关键部分为证明（5）式，适当选取 U，则问题化为，若 a 不属于 U，即若 $a\in m$，则 a 接近一个有理数 a/q，其中 q 充分大，特别 $P<q\leqslant P^{k-1}$，因此由（6）可知

$$\sup_{a\in m} | T(a) | \ll P^{1-2^{1-k}+\epsilon}. \qquad (7)$$

所以（见（5））当 $s\geqslant (k-2) 2^{k-1}+5$ 时

$$\int_m T(a)^s e(-Na)\mathrm{d}a \ll P^{(s-4)(1-2^{1-k}+\epsilon)}\int_0^1 | T(a) |^4 \mathrm{d}a$$

$$= P^{2+\epsilon+(s-4)(1-2^{1-k}+\epsilon)} = o(N^{s/k-1}).$$

这基本上就是 Hardy 与 Littlewood 关于 m 的处理方法，华罗庚关于圆法的第一个突出贡献为在 1938 年证明了，对于适合 $1\leqslant j\leqslant k$ 的每个 j，

$$\int_0^1 | T(a) |^{2^j} \mathrm{d}a \ll P^{2^j-j+\epsilon}. \qquad (8)$$

当 $j=1$ 时，由于 $\int_0^1 | T(a) |^2 \mathrm{d}a = P$，所以论断显然成立，$j=2$ 的情况亦几乎显然（含于（7）的推导中）. 用（8）的 $j=k$ 时的不等式可以证明（5）式对于 $s\geqslant 2^k+1$ 成立，对于所有这些 s，均易得出（2）与（4），所以当 $s\geqslant 2^k+1$ 时，华罗庚解决了问题Ⅰ. 自然，对于Ⅱ，我们有

$$G(k) \leqslant 2^k + 1. \qquad (9)$$

对于小的 k，这两个结果都是非常好的. 例如，由（9）得出 G（4）$\leqslant$17；事实上，Davenport 证明了 G（4）=16，但对应的问题Ⅰ，仍属悬案. 由（9）可知 G（3）$\leqslant$9，Linnik 与 G. L. Watson 用十分不同的方法证明了 G（3）$\leqslant$7，但是对于Ⅰ，直到很近，Vaughan 才证明了 $k=3$ 时，$s=8$ 时可解.

对于较大的 k（$k>10$），我们可以证明更强得多的结果，这

将于下面来阐述.

我已指出应用圆法的主要困难在于 m. 华罗庚在 1957 年证明了，尽管让优弧尽量地加大与加多，只要 $s\geqslant k+1$ 时，(2) 式即正确. 华罗庚的证明中的关键部分为完整指数和的估计.

$$\sum_{x=1}^{q} e((ax^k+bx)/q) \ll q^{\frac{1}{2}+\epsilon}(q,b). \tag{10}$$

而这个估计的证明需依赖 Weil 的一条深刻定理，这个指数和是更一般的和

$$S(q,f)=\sum_{x=1}^{q} e(f(x)/q)$$

的特例，此处 $f(x)=a_1x^k+\cdots+a_kx$ 及 $a_1, \cdots, a_k$ 为满足 $(a_1, \cdots, a_k, q)=1$ 的整数，这个一般的和与 Waring 问题有关（见 Vaughan 著 "Hardy-Littlewood Method" §7.2 剑桥丛书 80, 1981)，华罗庚早在 1938 年即研究了这个和，他在 1940 年证明了

$$S(q,f) \ll q^{1-\frac{1}{k}+\epsilon}, \tag{11}$$

此处与 0 有关的常数最多依赖于 k 与 ϵ. 除 ϵ 以外，这个结果本质上是最佳的；当 $f(x)=x^2$, Gauss 证明了 $|S(q, x^2)|=q^{1/2}$, 而且熟知当 $f(x)=x^k$, $q=p^k$ (p 为素数，$p\nmid k$) 时，$|S(p^k, f)|=p^{k(1-\frac{1}{k})}$在华罗庚之前，只知道各种各样的特殊结果. 在华罗庚之后，陈景润于 1977 年证明了

$$S(q,f) \leqslant e^{7k}q^{1-\frac{1}{k}};$$

利用更多的关于 f 的知识，还有其他改进，请见 Loxton 和 smith 的文章.

由于只要当 $s\geqslant k+1$, 优弧即没有问题，所以欲改进华罗庚的结果 $s\geqslant 2^k+1$, 其主要困难在于 (5) 式. Виноградов 对于当 k 较大时关于 (6) 的改进（特别，对于 (7) 的改进)，作出了决定性的进展 Виноградов 方法是极其复杂的.

华罗庚改进与简化了 Виноградов 方法，并指出 Виноградов

方法的核心为下面的中值公式.

命　$f(x)=a_kx^k+\cdots+a_1x$ 及

$$C_k=C_k(P)=\sum_{x=a+1}^{a+P}\mathrm{e}(f(x)).$$

命 $t_1=t_1(k)\geqslant 1/4k(k+1)+lk$. 则

$$\int_0^1\cdots\int_0^1|C_k|^{2t_1}da_1\cdots da_k\leqslant(7t_1)^{4t_1l}P^{2t_1-\frac{1}{2}k(k+1)+\delta}(\log P)^{2l},$$

此处 $\delta=\delta(k)=\frac{1}{2}k(k+1)\left(1-\frac{1}{k}\right)^l$.

由此立刻可以推出下面的定理:

假定 $k\geqslant 12$, $2\leqslant r\leqslant k$ 及

$$\left|a_r-\frac{h}{q}\right|\leqslant\frac{1}{q^2},\ (h,q)=1,\ 1\leqslant q\leqslant P^r.$$

则对于 $P\leqslant q\leqslant P^{r-1}$有

$$S=\sum_{x=1}^{P}\mathrm{e}(f(x))\ll P^{1-\frac{1}{\sigma_k}+\varepsilon},$$

此处 $\sigma_k=2k^2\ (2\log k+\log\log k+3)$.

在当今所有解析数论专著中，Виноградов 方法都是按照华罗庚的形式来阐述的. 例如，前面提到的 Vaughan 的书. 需指出，Vaughan 已吸收了新近 Karacuba 与 Bombieri 所作的进一步改良. 实际上，Vaughan 证明了当 $s\geqslant s_0\ (k)$ 时，问题Ⅰ可解，此处当 $k\rightarrow\infty$ 时，$s_0(k)\sim 4k^2\log k$ 及当$k>10$时有 $s_0(k)<2^k+1$.

Виноградов 亦发展了处理问题Ⅱ的方法，这个方法最精密的形式为用 Виноградов-华氏中值定理的渐近形式及华罗庚的公式（11）可证明（见上面引用的 Vaughan 的书第七章).

$$G(k)\leqslant 2k\log k(1+o(1))(\text{当 }k\rightarrow\infty).\qquad(12)$$

Виноградов-华氏中值定理在估计 Riemann ζ 函数 $\zeta\ (s)$ 在临界区间中的模的阶方面有一个非常重要的应用. 例如，见 Titchmarsh“黎曼 ζ 函数论”第六章.

华罗庚研究了（1）的几种变体，每一种都出现了新的技术

性困难，他研究了下面两种 Hilbert 定理的推广，每一种都保持了原来 Waring 问题的堆垒性质．假定 $f(x)$ 表示一个 k 次整值多项式，即

$$f(x) = a_k\binom{x}{k} + a_{k-1}\binom{x}{k-1} + \cdots + a_1\binom{x}{1},$$

此处 $\binom{x}{r} = x(x-1)\cdots(x-r+1)/r!$ 及 a_i $(1\leqslant i\leqslant k)$ 为整数，我们总是假定它们为正整数，华罗庚在 1937 年至 1940 年间证明了方程

$$N = f(x_1) + \cdots + f(x_s) \tag{13}$$

当 $s\geqslant 2^k+1$ $(1\leqslant k\leqslant 10)$ 及 $s\leqslant 2k^2(2\log k+\log\log k+2.5)$ $(k>10)$ 时，其解数有一个渐近公式．如果将（13）式换成

$$N = f_1(x_1) + \cdots + f_s(x_s)$$

结果仍成立，此处 $f_i(x)$ 为给定的 s 个 k 次整值多项式．命 $G(f)$表示使（13）式对充分大的 N 可解的最小的 s，命$\partial^0 f$ 表示 f 的次数，华罗庚建立了

$$G(f \mid \partial^0 f = k) \leqslant (k-1)2^{k+1}$$

及

$$G(f \mid \partial^0 f = 3) \leqslant 8.$$

他亦证明了

$$\max_f G(f) \geqslant 2^k - 1,$$

此处 $f(x)$ 过所有 k 次整值多项式，其中 $k\geqslant 5$.

华罗庚系统地研究了所谓 Waring-Goldbach 问题，即当 x_i $(1\leqslant i\leqslant s)$限制为素数时，（1）及其推广形式的可解性问题．他的研究成果总结在他的著名专著“堆垒素数论”中，例如他证明了当 $s\geqslant 2^k+1$ $(k\leqslant 10)$ 及 $s\geqslant 2k^2(2\log k+\log\log k+2.5)$ $(k>10)$时，方程

$$N = P_1^k + \cdots + P_s^k \tag{14}$$

的解数有一个渐近公式；还得到了许多变元为素数且与上述结果

相类似的结果.

最后，介绍一下华罗庚在所谓 Tarry 问题方面的工作.

命 $N(k)$ 表示最小的整数 t 使方程

$$x_1^h+\cdots+x_t^h=y_1^h+\cdots+y_t^h,\quad 1\leqslant h\leqslant k \qquad (15)$$

有一个非寻常解，即 $x_1,\cdots,x_t,y_1,\cdots,y_t$ 为正整数，但 $x_1,\cdots,x_t$ 不是 $y_1,\cdots,y_t$ 的置换，命 $M(t)$ 为最小的 t 使 (15) 可解，而且

$$x_1^{k+1}+\cdots+x_t^{k+1}\neq y_1^{k+1}+\cdots+y_t^{k+1}.$$

我们显然有

$$k+1\leqslant N(k)\leqslant M(k).$$

华罗庚证明了，当 $k\geqslant 12$ 时

$$M(k)\leqslant(k+1)\left(\left[\frac{\log\frac{1}{2}(k+2)}{\log\left(1+\frac{1}{k}\right)}\right]+1\right)\sim k^2\log k.$$

这是对 Wright 较早的结果 $M(k)<7k^2(k-11)(k+3)/216$ 所作的显著改进. 华罗庚的证明方法是初等与直接的.

华罗庚指出 Виноградов 方法可以用来处理 Tarry 问题，由此他得到了下述结果：命 t_0 由下表所示

k	2	3	4	5	6	7	8	9	10	$k\geqslant 11$
t_0	3	8	23	55	120	207	336	540	885	$[k^2(3\log k+\log\log k+9)]$

命 $r_t(P)$ 表示 (15) 适合于

$$1\leqslant x_i,y_i\leqslant P,1\leqslant i\leqslant t$$

的解数，则当 $t>t_0$ 时有

$$\lim_{P\to\infty}P^{\frac{1}{2k(k+1)}-2t}r_t(P)=c(t),$$

此处 $c(t)$ 为一个仅依赖于 t 的常数.

总之，华罗庚对圆法发展所作的贡献，与 Davenport 的贡献一起，仅次于 Hardy，Littlewood 与 Виноградов 的贡献，是肯定能够经得住时间的检验的，他的两个积分均值定理给予了巨大的技术进展，这种永恒的影响甚至超出了 Hilbert 定理的范围. 他关于 Waring 问题变体的研究及关于 Waring-Goldbach 问题的著名研究. 对于弄清圆法的力量与范围都是极为开创性的研究. 几代数论学家都从华罗庚的至今仍有影响的 1947 年的专著“堆垒素数论”中学到了圆法的知识，上述 Vaughan 的近作对于至今为止圆法的巨大进展，作出很好的总结，即使大致翻阅一下亦能看到华罗庚对圆法发展所作的贡献所处的杰出地位.

2. 对数论的其他贡献

华罗庚的数论论文实际上是 20 世纪 30 至 40 年代数论舞台上重要活动的索引. 从这个背景看，华罗庚的兴趣是如何特殊的广泛，他对当时的数论技巧掌握得是何等之深，他的活跃思想是何等重要. 到 1945 年，华罗庚已明显是那时的领袖数论学家之一.

在 Rademacher 关于分拆函数的著名工作出现后不久，华罗庚就得到了关于将 n 分拆为不同部分（或分拆为奇数部分）的方法数目 $q(n)$ 的一个准确的公式

$$q(n)=\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{\substack{k=1\\k:\text{奇}}}^{\infty}\sum_{\substack{(h,k)=1\\0\leqslant h\leqslant k}}\omega_{h,k}e\left(-\frac{hn}{k}\right)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}n}J_0\left(\frac{i\pi}{k}\left(\frac{2}{3}\left(n+\frac{1}{24}\right)\right)^{1/2}\right),$$

此处 $J_0(x)$ 为零级 Bessel 函数（因为第二次世界大战，本文的发表被推迟了）.

华罗庚研究了圆问题并且证明了，若 $A(x)$ 表示圆 $u^2+v^2\leqslant x$ 中的整点 (u, v) 的数目，则

$$A(x)=\pi(x)+O(x^{\theta+\varepsilon}),$$

此处 $\theta=13/40$. 这是对 Titchmarsh 的结果 $\theta=15/46$ 的改进，这结果带动了不少中国数学家做进一步的改进.

在华罗庚的两篇论文中（亦参见他与闵嗣鹤合作的有关论

文)，他对于什么实二次域 $R(\sqrt{d})$，此处 d 无平方因子，具有欧氏除法（EA）这一问题作出了贡献．在第一篇文章中，华罗庚证明了当 $d>e^{250}$ 时，不存在 EA，并在注记中称 250 可以降低至 160，他的结果是从模为素数的最小二次非剩余的有独立兴趣的研究中导出来的．

华罗庚改进了 Бухштаб 关于某个有迟滞项及初始值的微分差分方程解的收敛速率的结果．他的优美证明中包含了一个很有用的引理（引 5）：假定 $F(u)$ 为满足函数方程

$$F(u)\leqslant\frac{1}{u}\int_{u-1}^{u}F(t)\mathrm{d}t,\quad u\geqslant u_0$$

的一个正函数．则

$$F(u)\leqslant\exp\left\{-u\left(\log u+\log\log u-1+\frac{\log\log u}{\log u}+O\left(\frac{1}{\log u}\right)\right)\right\}.$$

类似的微分差分方程出现在以后很多数论研究之中．华罗庚的引理已被证实是非常有用的．

华罗庚与王元合写了一系列论文，研究了在近似分析中，如何用基于数论思想的可计算与决定性的方法来取代统计实验的 Monte Carlo 方法的问题．他们的工作，及其他主要属于中国学派与俄罗斯学派的工作，均阐述于他们的书“数论在近似分析中的应用”之中，他们的方法的要点为构造代数数域的特殊整底；用一组独立单位或线性递推公式来构造整底的联立有理逼近；及偏差估计．书中的附录给出了 2 至 18 维时的数值信息．

注记　第二节，代数与几何（万哲先），第三节，函数论（龚昇与陆启铿）及华罗庚著作目录已发表于《数学进展》第 15 卷第 3 期，1986 年，故从略．

附　录　V

悼念华罗庚

哈贝尔斯坦*

华罗庚在1984年6月19日的一封信中写道："但愿还能给我足够的时间，再回到大学去开设一门课程，让我重温我生命的黄金时光——40年代."他未能如愿，1985年6月12日，他在东京讲学时，心脏病发作，猝然去世．辉煌的业绩，民族的英雄，他整个一生已经以他做过的一切，极好地做到了——阐发他的思想．

华罗庚的一生，充满了现代传奇人物的色彩．我不知道他出生的准确日期，即使出生的年份，也有某种程度的推断．他可能是1909年11月出生在中国江苏省金坛县的一个贫苦家庭里，最多受过九年的正规教育．可是，他年方19，就写出了关于斯图谟（Sturm）定理的第一篇论文．不久，他成为北京清华大学的助教而至讲师．在以后几年中，他被中国文化基金会授予研究员职位．30年代中期，诺伯特·威勒（Nobert Wiener）访问中国，他必定很欣赏华罗庚．他将两人的会见，向哈代（G. H. Hardy）作了报告，因而1936年，华罗庚抵达英国剑桥（Cambridge）大学进行了两年访问．这对年轻的华罗庚具有决定意义．他最早的一批论文，表明了他的数学兴趣涉及到广阔的领域．早在1934年，他就致力于华林（Waring）问题的研究，在剑桥期间，为后来的堆垒素数论的卓越贡献奠定了基础．这两年及其后在1945—1946年，他与苏联的维诺格拉多夫（I. M. Vino-

---

* 见 Loo-Keng Hua, Obituary, Math, Intel, Springer, 1986. 王克译.

gradov）一起度过的富有成效的三个月，以及 1946—1950 年在美国的五年，这是华罗庚在西方主要的数学中心工作的全部时间(普林斯顿 Princeton 三年，伊利诺伊 Illinois 二年)，但他的成就十分惊人，在此时期，他继续在解析数论的研究中，作出重大的贡献，同时，他已着手对矩阵几何学、多复变数函数、有限域上不定方程论及辛群的自同构等进行研究.

华罗庚站在学者与教师的崇高的传统地位上，拥有威仪的相貌、迷人的个性和丰富的想象力. 他不仅是一位卓越的研究工作的领导者，而且是一位多层次教育的杰出导师. 他的一些学术论著，即使是很多年前写成的，现在仍在全世界被采用. 1950 年，他最终返回中国后，也用来指导他的研究生. 这些书只是他撰写的论著很小的一部分，他用惊人的勤奋和炽烈的热情，教育他的人民运用数学. 后来，在国家进行工业化的运动中，他被请去担任某类数学疑难问题的咨询人. 华罗庚和一个科学家组成的小分队，跑遍中国各地，向工人讲述如何运用他们的推导能力去解决大量的日常问题. 无论在车间里的特殊问题研讨会上，还是工厂外的大型露天集会上，他用数学的精义纵论形形色色的问题. 全世界没有一位数学家曾经像他这样做过. 思索西方的相似人物，人们可能想到阿培拉德（Abelard）使巴黎神学院的大厅坐无虚席，或者约翰·韦斯里（John Wesley）在英国和美国的传道. 但是，这种广泛折服于一位人民教师的影响的情况，也许是一种真正东方的现象，是我们这些西方人所不能完全理解的.《文选》末尾 152 篇论文的一览表，使我们得以初窥华罗庚咨询活动的规模. 即使其应用范围的一般领域，也多得在文中不胜枚举. 华罗庚曾谈到将来有一天要出版这些论文的细节，但现在，恐怕再没有这个机会了，我们只好对特意为《文选》而由中文翻译过来的“关于在等高线图上计算矿藏储量与坡地面积的问题”（与王元合作）一文表示满意了.

即使一位学术水平一般的人，也可以在他晚期发表的关于微分方程、运筹学和数值积分的课题中，看到华罗庚从 50 年代后

期就起步的朝着数学应用的动向．但是，华罗庚最终的科学著作又完美地转回到理论方面．比如，运用均匀分布和代数数论的思想，与王元合作，在多重积分的数值求积中，代替了蒙特卡罗（Monte Carlo）法．他在我系的最后一次讲演是 1984 年，在挤满人群的大厅里，对数理经济学作了生动的演说．

在“文化大革命”的岁月里，华罗庚处境困难，他认为他能活过来，至少一部分还得归功于毛主席对他的个人保护．尽管如此，他的许多论文和手稿还是被查抄并估计被毁了．“解冻”后，华罗庚被允许接受里文斯通（Livingston）教授的邀请，作为英国科学研究委员会的高级访问学者，访问了英国伯明翰（Birmingham）大学，随后，他又有机会访问了欧洲和美国．就许多方面来说，这些访问是他充满传奇色彩的性格，在与外界隔绝 30 年后而渴望获得的个人的成功．我们可以通过各地的华人团体以及所有各种政治信仰的人，都争先恐后地去会见他，那怕仅仅看他一眼，了解到他在国内获得的重要地位（中国的电视台制作了六集反映他早年生活的电视连续剧）．他渴望重会他青年时代的数学同道，同时，他对他非常亲切地想再见一面的许多老友的去世也感到刺骨的伤感．

如果华罗庚曾经懊悔在他才华的高峰和思维敏锐的时候离开了美国的话，那么他后来重访西方时，他不能收回失落的时光，而他对自己祖国的献身是无条件的和坚定不移的．1938 年，他回到中国，一直到 1945 年，他都在云南省昆明市西南联合大学任教授，这是由于日本侵略中国，沦陷了的几所大学组建起来的一所大学．1949 年，中华人民共和国成立，第二年他又回到了大陆，从事于重建中国科学院数学研究所的工作．1952 年被任命为所长，在这个岗位上一直到 1984 年，同年由王元教授接任．他还担任了多年中国科学院的副院长和在安徽省合肥市的中国科学技术大学的副校长．1957 年，他的《多复变函数中的典型域上的调和分析》著作，得到了中国的自然科学一等奖．1980 年他接受了法国南茜（Nancy）大学的荣誉博士学位．1983 年他接

受了香港中文大学荣誉博士学位. 1984 年他接受了美国伊利诺伊（Illinois）大学荣誉博士学位. 1982 年，他当选为美国科学院国外院士. 1983 年，他当选为第三世界科学院院士. 1985 年，他当选为德国巴伐利亚（Bavaria）科学院院士.

附 录 Ⅵ

华罗庚教授在日本

弥永昌吉*

我被邀请参加纪念已故华罗庚教授的国际数论与分析会议，并有机会在会上作一个报告，这对我来说，的确是一个巨大的荣誉和愉快．对我个人来说，受此殊荣，实在深感意外．这是一个科学的会议，所以首先受到尊敬的应该是有高度科学价值的报告．如果我能够在这里报告我关于华罗庚的思想的发展并得到关于 Goldbach-Waring 问题或圆问题的新结果，我是会非常愉快的．我的主要领域是数论，我高度评价华罗庚教授及其学派在这个及其他领域中的贡献．但是我是在代数数论方面，而不是在解析数论方面工作，所以我不可能在后一领域中作出贡献．除此而外，我比华罗庚教授还要年长四岁，我已经不处于数学的高产年龄了，所以我希望得到你们的原谅：我在这里讲一点个人之间的事，而不去讲科学的事．

谈到个人的回忆，你们当中许多在他身边工作的人，当然会比我有更多可以讲的东西．华罗庚有相当长的时间是呆在苏联，英国，法国与其他欧洲国家．他在这些国家里有许多朋友，其中有许多人还参加了这次会议．华罗庚教授也访问过几次日本，虽然他在我们国家里的时间不长，却给我们留下了很深的印象．特别使我们不能忘记的是，他是在 1985 年 6 月 12 日下午在东京大

---

* 见 S. Iyanaga, Professor Hua Loo Keng in Japan, International Symposium in Memory of Hua Loo Keng, Vol. 1, Number Theory, Edited by Gong Sheng etc. 1991, 15—18. 王元译.

学作过演讲之后去逝的.

在讲一些事情之前，我愿意先讲一些华罗庚的工作对日本数学的影响. 如果一个人能够借助于计算机来编一个日本人撰写的论文中征引过华罗庚著作的全部索引的话，这将会是一个很大的篇幅. 不幸地是，我没有足够多的时间来做这件事情，我只能列举其中的一点点.

在日本，长时间被作为解析数论标准教程的 Suetuna 关于解析数论的书（1950）的最后一部分里，我们发现了华罗庚关于圆问题的结果被征引了. 与华罗庚数论工作的广阔领域相比较，Suetuna 的书则仅仅局限于特殊的 Dirichlet 级数，Riemann 或 Dedekind zeta 函数，Hecke 或 Artin L 函数. 他是应用了代数数论而获得一般结果的，但他却承认了华罗庚关于圆问题结果的优越性. 在 Suetuna 之后，由 Tatuzawa，Mitsui 与其他数学家构成的日本解析数论学派的工作与华罗庚学派的工作有许多相同之处，而且华罗庚的结果常常被他们所征引.

Suetuna 的一个学生江田义计（Yoshikazu Eda）被华罗庚（与王元教授合作）的书《数论在近似分析中的应用》所吸引. 这本书在 1979 年刚出版时，他就立即阅读了中文原著并将它翻译成了日文. 他的日文翻译手稿被复印了许多份并在有兴趣的人中间加以散发. 但是，由于这本书的英文翻译本已于 1981 年出版了，从而江田义计的日文译本就很难再有出版的机会了. 在日本，大多数的人是读华罗庚的书《堆垒素数论》与《数论导引》的英文版的. 在我们国家里，人们也广泛地阅读了华罗庚用英文写的论文而编辑成的书“华罗庚论文选集”.

华罗庚关于矩阵变元的函数论及典型域的几何学也是众所周知的工作. Suagawara，Morita 与 Satake 征引了他的这些文章. 由日本数学会编辑出版的岩波数学词典中，华罗庚的名字在以下六个领域中被提到了：堆垒数论、格点问题、数论函数、离散群与数的分拆.

华罗庚的数学活动还远不止这些. 他除了是中国数学研究最

重要的领导人之外，他也是一个伟大的数学教育家与科学普及工作者．他在东京大学最后的演讲中，讲的就是这些事情．我将在以后再作一点叙述．除了上述领域外，他还对其他一些领域作出过小的但却是很美的贡献．例如，1949 年，他在位于 Urbana 的 Illinois 大学执教时，写了一篇关于体的自同构的天才论文．我有机会在东京大学的几何课程中，怀着崇敬的心情讲授了它．

尽管我早在 30 年代就已经知道了他的名字，但一直到了 70 年代，他作为促进我们两国友谊代表团的一个成员来到日本的时候，我们才第一次见了面．科学与数学不是这个代表团唯一的目的，在他与日本数学家的多次聚会中，我们都未能深入地讨论科学问题．但他的和蔼容貌，却给我留下了极为深刻的印象．

通过一些访问，我可以肯定华罗庚很了解相当一些日本人，其中当然包括很多数学家．在众多的日本数学家之中，必须算上白鸟富美子（Fumiko Shiratori）女士，她与华罗庚有最好的友谊．白鸟富美子女士是 30 年代时，东京女子师范学校的青年学生（第二次世界大战之后，该校改名为 Uchanomizu 女子大学）．她的兴趣为代数数论，该校的 Kuroda 教授将她介绍给了我，但我与她以后并未能再有机会接触，直到 1972 年，在参加 Kuroda 教授的葬礼的时候，才又见到了她．她告诉我，她在中国呆了 20 多年，现在仍然还在学习数学．她很幸运地认识了华罗庚教授，由于她长时间地住在中国，所以她非常熟悉中国的生活与语言．我深信她对于促进中日科学家之间的相互了解必定作出了巨大的贡献．

作为日本科学家代表团的成员之一，我于 1975 年访问了北京．尽管我有幸见到了段学复教授、吴文俊教授与其他数学家，但使我失望的是我未能在北京见到华罗庚教授，特别是白鸟富美子女士还要我向他问候．

1980 年的一天，白鸟富美子女士从北京打电话告诉我：华罗庚要去美国访问，他需要一个氧气袋来增强他的心脏之功能．问我能不能供给一个日本的装置使他在东京机场转飞机的时候能

够带走．我很高兴地告诉她，由中日科学与技术交流协会的秘书 Higo 先生代办，我们可以给予服务．

1985 年 6 月，应日本与亚洲国家交流协会的邀请，华罗庚教授率领中国优化与经济研究代表团访问了日本，代表团中包括了陈德泉，计雷与徐新红教授．6 月 12 日早晨，他访问了日本学士院，我有幸与 Kenjiro Kimura 与 Kosaku Yosida 教授一起在那里欢迎了他．他高兴地和我们交谈，并将放在他的汽车中的氧气袋指给了我看．他在下午抵达东京大学的时候，受到了日本数学会主席 Hikosaburo Komatsu 教授，白鸟富美子女士，Kosaku Yosida，Tatuzawa，Morimoto 教授与其他一些人的欢迎，遗憾地是我忙于其他事情而未能听他的演讲，我仅从其他人，特别是 Morimoto 发表在“Sugaku Seminar”上的报告中得知了所发生的一切事情．

4 点钟，Komatsu 教授作为报告会的主持人，向 103 报告厅中的听众宣告，华罗庚的报告题目是：“在中华人民共和国普及数学方法的一些个人体会”．华罗庚用中文讲，然后由翻译将它译成日语．但不久之后，他就要求主席可否允许免去翻译而由他直接用英语讲？由于他的英语很流利，演讲即刻变得生动活泼起来了．他显示的第一张投影片上面仅有两个字：“理论”与“普及”．然而他向我们讲解了在 50 年代中，他在这两个方面都做了些什么．在“理论”方面，他写下了下面两本书：《多复变函数论中的典型域的调和分析》和《数论导引》．他很高兴地看到龚升和陆启铿发展了第一本书中的想法，而王元与陈景润在第二本书的方向上工作着．在“普及”方面，他介绍了中国的数学奥林匹克活动及他所倡导的最优化理论的研究．然后他讲到了数论在近似分析中的应用．前面已经说过的论述这一主题的书已经由江田义计翻译成了日文．例如，若 (F_n) 是 Fibonacci 贯及 $f(x, y)$为一个以 $(1, 1)$ 为周期的双周期连续函数，则可以得到精密的近似逼近式

$$\int_0^1\int_0^1 f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \sim \frac{1}{\mathrm{F}_{n+1}}\sum_{t=1}^{F_{n+1}} f\left(\frac{t}{\mathrm{F}_{n+1}},\frac{tFn}{\mathrm{F}_{n+1}}\right).$$

他还讲了一个在等高线地图上计算面积的方法及非负矩阵与黄金分割在经济中的应用. 关于后一主题, 他甚至用香烟来显示他平日对这一问题的解释. 他的演讲比预计的一小时延长了 10 多分钟. 整个听众都被他活跃的演说而听得人迷了. 差不多当 Komatsu 教授问听众是否还有问题要询问时, 华罗庚教授倒在了地上, 他的媳妇医生柯小英女士立即将氧气袋拿去给他使用. 大学医学院的医生也参加了抢救. 华罗庚教授于当晚 10 点仙逝了, 享年 75 岁. "Sugaku Seminar" 于几个月后发表了几篇关于华罗庚教授的文章: Morimoto 发表了关于他的最后演讲的报告, Tatuzawa 的文章叙述了华罗庚的数学工作, 白鸟富美子的文章中讲述了她的回忆: 华罗庚曾向她表示了访问日本及与日本数学家和人民多多接触的强烈愿望, 还表示了他希望自己能够工作到最后一天的决心.

回忆起这件悲痛事情的时候, 在纪念华罗庚的国际会议上, 我见到代表着当今中国数学的他的著名学生, 他的朋友及全世界很多尊敬他的人们, 我很愿意奉献一个对华罗庚教授的诚心回忆及向会议的组织者致以祝贺的讲话.

附 录 Ⅶ

怀念华罗庚

段学复*

——天才和勤奋造就华罗庚成为一位伟大的数学家

华罗庚于1910年11月12日出生在中国江苏省金坛县.

1926年他从金坛初级中学毕业后，到上海的一所职业学校学习不到一年，就由于生计困难而辍学. 他回到家乡帮他父亲照看一家小杂货铺，并在余暇自学数学. 他在科学杂志上发表的两篇关于方程式论的论文，引起了北京清华大学数学系系主任熊庆来教授的尝识，1931年秋季，让他担任了系的图书管理员. 由于他的卓越成就，随后几年，他被提升为半薪助理、助教，而至讲师. 1934年，他成为中华文化教育基金会的研究员.

1932年秋季，我考入清华，成为数学系的新生，有幸结识了华罗庚. 不久，我们成为挚友. 我们常常与从金坛来的其他学生一起晚餐，在校园内漫步，谈论数学和其它. 我从华罗庚谈及的如何学习数学中受益匪浅.

从1932年到1936年的四年中，华罗庚的才气和勤奋给了我强烈的印象. 在清华工作的日子里，他住着一个单间，寒暑假中，他回到金坛家中与妻子和两个孩子团聚. 那时，华罗庚年轻，精力旺盛，每天紧张地学习数学10个小时以上. 他早晨总是起得很早，抓紧早饭前的点滴时间，极其专心地工作. 他很快就抓住了数学的精华. 正如他在以后几年所说的那样，阅读大量

* 见 Memories of Loo-Keng Hua, Contemporary Matn. AMS. 82, 1989. 王克译.

的数学论著，并能把它们缩减成简明的要点是非常重要的．他大约用了一年半的时间，主要通过自学，掌握了全部基本的大学数学．当然，他也去听一些课，比如他与同学许宝騄、柯召与王竹溪在 1931 年秋季去旁听了熊庆来教授的复变数课，他们三人后来都成为数学或物理学的著名学者．华罗庚告诉我，他们在一起做分析（或“难的”分析）中的一些难题，进行友谊竞赛．华罗庚跟杨武之教授开始学习数论，从 1935 年起，他渐渐集中精力系统地学习了哈代——李特伍德——维诺格拉多夫（Hardy-Littlewood-Vinogradov）方法，即堆垒素数论，这是他以后曾作出了重大贡献的一个领域．在学校的日子里，他学习了英文，现在，他还能阅读法文与德文的数学书，比如，E. Goursat 的《高等数学分析》（《Cours d'Analyse methématique》）与 E. Landau 的《数论引论》（《Vorlesungen über Zahlentheorie》）．1935～1936 年，J. Hadamard 与 N. Wiener 访问清华并讲学，华罗庚听了他们的讲学．Hadamard 提请华罗庚去注意维诺格拉多夫的工作．华罗庚与当时系里的一位新助教徐贤修一起写了一篇关于复富氏分析的论文，Wiener 非常赞赏这篇论文．

在 Wiener 的推荐下，G. H. 哈代（G. H. Hardy）邀请华罗庚访问剑桥大学，他在那里从 1936 年呆到 1938 年．在这两年中，他在解析数论上作出了突出的贡献．除此之外，他开始注意到抽象代数的绚丽的领域．这完全体现了华罗庚在开辟新的研究领域中科研累进的特色．由于抗日战争爆发以后，他渴望回到中国，华罗庚在剑桥没有再呆下去．

1938 年秋季，华罗庚回到中国昆明，就任由清华大学、北京大学与南开大学组建的西南联合大学的正教授．我们又在一起，我是他的助教．1938—1939 年，他根据 B. van der Waerden 的《近世代数》（《Moderne Algebra I》），并通篇作了若干修改，就抽象代数开设了一门课程．此外，他领导了一个有限群的讨论班，采用了新出版的 H. Zassenhaus 的《群论》（《Lehrbuch der Gruppentheorie》）与 A. Speiser 的《有限阶群论（第三版）》

(《Die Theorie der Gruppen von Endlicher Ordnung (Dritte Auflage)》),以及 P. Hall 关于 p 群的基本论文(1934)作为参考文献. 樊畿、徐贤修和我都是其中的参加者. 我和华罗庚一起研究过 p 群,特别是其中的"记数"理论. 我们间富有成效的合作,一直给我留下愉快的回忆.

1940 年,我离开昆明出国留学,起初在多伦多一年,后来在普林斯顿一直到 1946 年. 这段时期,我与华罗庚相互间经常通信. 他当时住在离昆明市不太远的一个名叫黄土坡的小村里. 一次,在空袭时,华罗庚与闵嗣鹤躲到一个简易的防空掩体中,一枚炸弹落在了附近的地方,掩体坍了下来,他们被埋在落下的泥土里. 幸运的是他们被营救出来. 在这样极其困难的条件下,华罗庚与他的主要合作者闵嗣鹤一起,继续在数论方面得出了重要的结果. 1941 年,他开始在多复变典型域的理论上进行系统的研究. 1943 年 4 月,他的关于自守函数的两篇论文的手稿寄给了普林斯顿的 H. Weyl,在美国数学学报上发表. 人们发现 C. L. Siegel 与华罗庚差不多在同时研究着相同的理论. 华罗庚的第一篇论文,与 Siegel 早在 1943 年出版的《辛几何》(《Symplectic Geometry》)不可避免的有着部分重复,然而,它们的重点是有所不同的. 在矩阵几何学的有关研究中,华罗庚也作出了极好的进展. 1946 年春天,我接到华罗庚来信,他应苏联科学院数学研究所所长 I·M·维诺格拉多夫的邀请,去苏联访问了三个月. 华罗庚现在的经典专论《堆垒素数论》就是 1947 年首先用俄文发表的,而直到 1952 年才译成中文(校订本)出版. 它还被译成了匈牙利文(1959)、德文(1959)与英文(1965). 1938—1946 年,华罗庚在昆明所做的数学工作是一个真正的奇迹.

1946 年 7 月,我从美国回到中国,而华罗庚携全家大约同时又去到美国. 我们在上海小聚了一段时间.

从 1946 年到 1948 年,华罗庚作为普林斯顿高级研究所的一个成员在那里工作,并在普林斯顿大学讲授数论. 从 1948 年到

1950 年，华罗庚在伊利诺伊大学任教授．在这四年中，华罗庚在抽象代数上做出了几个非凡与优美的结果，诸如体的半自同构理论，体上一维射影几何的基本理论，以及加当-仆劳威尔-华(Cartan-Brauer-Hua Theorem)．在这些工作以及有关问题中的深度洞察为基础，华罗庚成功地运用了直接代数方法．同样，在体或环上典型群的自同构与结构的研究中，华罗庚的矩阵方法也成功地用于处理由 J. Dieudonné 留下的困难的低维情形．

早在 1950 年，中华人民共和国建立不久，怀着献身发展中国数学事业的强烈愿望，华罗庚全家回到北京，再次就任清华大学的教授．1952 年，华罗庚被任命为中国科学院数学研究所所长，我到了北京大学工作．自此以后，我们就不再在一个学校工作了，但是，我们有许多共同参与的数学活动，除了 1966—1976 年 10 年动乱外，我们时常见面．

华罗庚从 1951 年到 1983 年被选为中国数学学会理事长，这之后，又是五位荣誉理事长之一．华罗庚还被任命为中国科学院数学物理学化学学部副主席、中国科学技术大学副校长和中国科学院副院长等．

华罗庚 1950 年回国后，除了在数学研究上继续做出新的重大贡献外，他用了更多的精力去培养年轻的中国数学家．他领导了许多讨论班，并写了许多专著，特别在数论、典型群与多复变数函数方面，从这些讨论班的成员中，涌现出了许多优秀的学者，他们中间有数论的王元、陈景润，代数的万哲先，多复变函数的陆启铿、龚昇．1960 年后，华罗庚又在应用数学上开拓工作，诸如偏微分方法与数值分析，1965 年后，在工业应用上普及数学方法，特别是优选法和统筹方法．华罗庚和他的小分队到过中国的大部分省市的许多工厂．

在数学文献中，华罗庚的许多卓越成就，包括定理、引理、方法、不等式、恒等式、算子等，都是以他的名字命名的．在 20 世纪 70 年代末到 80 年代，华罗庚当选为美国科学院国外院士，第三世界科学院院士，德国巴伐利亚（Bavarian）科学院院

士，并被授予法国南茜（Nancy）大学、香港中文大学、美国伊利诺伊大学的荣誉博士学位．我不打算进一步再写他自1950年以来的数学工作，也不写他在这个时期在国内外的数学活动，这里只写我与他在1984—1985年中个人接触的一些事件．

1984年9月，华罗庚应邀在1984年北京国际群论讨论会上作了题为“非负方阵与计划经济”的学术报告．这是他关于数理经济学的研究的一部分，1966年前，他对此已经得出了系统的理论．可惜的是在动乱年代，这些手稿都丢失了．重写他的成果，特别是基本理论的证明，需要付出新的努力．后来有一次他就此事作为一个例子谈到，他赞成在现时的环境下，对此课题宁可去做一个新的证明，要比去找回那丢失的旧的证明更好些．

1985年6月1日早晨，华罗庚飞往日本的前两天，我给他打了一个电话，祝他一路顺风，我们还愉快地谈了一些别的事．当我从无线电里听到他在东京大学刚作完学术报告后，6月12日由于心脏病发作猝然去世的消息时，我完全震惊了．华罗庚的最后演讲，概述了他自1950年以来在理论研究和数学普及方面所做的工作．

华罗庚把他的整个生命献给了数学．他对数学理论的贡献极其广博，极其深厚，极其突出，并有着高度的影响，他对数学方法应用的普及工作易为普通人民所接受，并具有很显著的效益．他对在中国发展数学事业建立了卓越的功勋．他的数学工作是不朽的．他是当代一位伟大的数学家．

附 录 Ⅷ

纪念华罗庚先生

田方增

华罗庚先生离开我们快五年了. 我们相信，随着时间的推移，人们正继续从他留下的精神的和事业的财富中受益，永远怀念着他.

我最近读了段学复先生写的“怀念华罗庚”一文*，感受很深. 段先生1936年在清华大学数学系出任教职时，我是系里学生. 抗日战争前，我没有直接受教于华先生，也没有什么其他接触. 但同学们盛传华先生学识渊博，能力高强，倾向爱国进步. 1940年秋，我从中学回到西南联大数学系工作，才有机会接触华先生，受其教益.

华先生自1950年下半年起，参与了筹办中国科学院数学研究所的工作并指导业务. 1952年夏，研究所正式成立时出任所长，直到1985年夏他突然离开我们. 这个过程很长，包括不同时期，华先生在所内外多方面有职务和工作，他主要致力于发展数学为社会主义祖国的广泛需要服务，同时，提高我国数学的地位. 他善于安排跟他工作的人完成各自的工作，好似已洞察了一切，使你在完成他交办的事务中从没有感到未曾料及的重要情况. 他平易近人，能及时地了解你想什么. 你若因工作想请问他什么，也可直截了当找他谈. 在研究所和在西南联大时一样，上

---

* 段学复写的“怀念华罗庚”(Memories of Loo-Keng Hua)一文，载《当代数学》(Contemporary Mathematics, Amer. Math. Soc.)第82卷，1～5页. 本书已译出载入.

班时不同方面找他的人往往很多，但间歇时间里，他常以特有步伐走到其他房间找人谈谈．他的职务及社会活动繁多，在研究所内外凡遇到认识的、有着不同关系的人时，他会自然去接触，或打招呼，或互相交谈一点事，都用他那特有的敏捷痛快的方式进行，甚至对待公共场所接待处的服务人员也如此．华先生珍惜时间，讲求效率，也随时随地同样想到别人．华先生的这种风格是与他多年来在社会上亲自推广优选法等数学方法，从理论与实际、言与行中完全一致的．数学所内从事业务及行政管理的工作人员，只要跟他稍久都同有此感．我从 1950 年下半年起，在华先生直接领导下做着数学所内行政及有关学术组织中的一些工作．

华先生在贯彻科学研究的国家政策中，始终表现出科学家的那种认真务实精神，处事敏捷，讲求实际和效率，言行朴实，又渗透出高度的科学智慧．要更好地认识他的深远影响，还有待今后从多方面考察迄今数十年来我国数学事业的历程与成就．

在几次全国性数学学科规则、有计划学习外国先进事物及重大的国际合作交流中，华先生以公认的地位主持开展工作，这对立足于我国自己的学术基础及环境，力求先进，对解决不简单的认识问题起了不可代替的作用．在主持全国性数学界学术活动及共同的重大事项方面，也可见到类似情况，不一一列举．对与此有关的重要、具体的日常工作，他始终十分认真，注意沟通上下各方，例如将参加国家科委会议时做的详细笔记，留给我们参考．研究所开办以来，人民来信不断，多种多样，一般与所本身业务没有什么特别关系，但反映人民群众对数学学习的期望．华先生名下直接收到的占绝大多数，对这些他都过问，不时会同所内同志从大堆来信中拣、分并组织人员回答，他自己也参与写回信．这虽是比较次要的所内事项，但也使我们见到他怎样认真务实、为人民服务和防止官僚主义，不尚空言而用自己的行为影响周围，回答外界．

所有上述说到的华先生的工作，特别在数学研究所内的领导

工作令人深感实受之处，在他的最后几年中仍强烈地表现着．1979年上半年将原数学研究所分为数学、应用数学及系统科学三个研究所之议酝酿成熟．华先生在此之前十多年已设想如何发展应用数学，并且展开了有关的具体的业务活动．经过1977—1978年进行的全国学科规划讨论，最终实现了他为我国数学科学在科学院内完整的体系做出建树的宿愿．事实上，50年代早期，他就同意从自身条件出发，在数学所内为力学、计算数学及计算机科学工作打下始建的基础．随后，又在适当的时机积极支持力学及计算技术两个科学部门在科学院建所，同意调出骨干力量．1979年5月中，他应邀到英国讲学，临行前召集有关人员谈话，对一些与他负责范围内的有关事项（包括数学应用任务及数学会等），做了确切嘱托．在留下的书面备忘录中有“我们是搞科学的，一切要依科学态度办事，党的原则是民主集中制，一切要照民主集中制办事”等语．这次华先生出国工作约经半年多，他随时把在外的情况写信告诉国内，保持与国内联系，嘱咐一些应进行的工作．在信中，他结合在国外的感受及国内外数学的比较，认为我国数学定能加速前进，并抱极高信心．这期间他给很多同志写了信，我收到五封信．他是1979年12月31日返抵北京的．1980年1月3日一上班，他就来到原数学研究所全体人员所在的各办公室（北京中关村相距里许的两座楼内），逐屋与大家亲切见面．这个时期，原数学所已进入正式实施分所的后期．分所后，他直接领导数学及应用数学两所，所外任务更重，他那时已年逾七旬，仍到所及时处理要务，还有多方面繁重的活动．大家知道他的身体在那些年已不很好，有时在办公室随身带着氧气袋，常被医生强迫休息疗养．可是，他是呆不住的，往往稍见情况平稳，就出来照样工作．这些给我极深印象．

40年代在昆明时，我们都有这样的了解，就是他的注意力不限于自己正在工作着的专门领域．在西南联大时，他遇上有人在他认为值得学习或工作的问题上去下功夫，他会主动与这人交谈．例如，他告诉一个年轻同事，E. H. Moore的《General

Analysis》可细读一下，那时他想着在代数数域上建立函数论；又如，当时系内外有人一起讨论 M. Stone 的《Linear Transformation in Hilbert Spaces》，华先生也注意此事，并在系内提到．数学研究所建所早期，正当 Gelfand 的赋范环及 L. Schwarz 的广义函数工作传播开来，我们自己组织过有关的讨论班，他曾参加听和讨论：这些事说明他对泛函分析也顺带注意．事实上，他曾建议另一种处理广义函数的途径（见华罗庚《从单位圆谈起》第八讲，科学出版社）．还有许多他关心过并做出反映他的主要成就特色的基础理论的其他研究．文革前，他在所内领导典型群、解析数论、结合及非结合代数（环）、多复变等讨论班，共有多次成系列的计划，都一一实行，并带领多人做着研究．除讨论班外，他还倡导以体育的精神要求人磨练自己来提高做研究的功夫．一种方式是举办"练拳园地"．他要求所内同志和他一起找题目，并在所内公布出来征求解答，然后他还评阅或与人讨论得到的解法．事实上，这也是考察及培养所内年轻人的一个方面．在这些活动中，也像在昆明那时对待年轻人一样，总要逐人过问，抓紧．他爱护学生就是严要求，事实一再证明，这是真正有效的．至于他晚年还以更大精力为了数学的应用，为了从事经济建设事业及宣传普及做了大量切合实际又富启发性，有巨大社会效益的工作，更是国内上下熟知的．正是在这个一生愿望将最好地得偿的时刻，带着已全面呈现的伟大精神和力量，并时刻准备贡献一切，华先生应邀到日本讲学和交流经验．一生顽强奋斗走到前面的人，竟在邻国讲台工作到最后而离开了我们，时为 1985 年 6 月 12 日．大家感到的震撼是难以用语言表达的．为了我国的伟大事业，为了我国数学界，回忆华先生，就是要向他再学习．但我只是提及很少一部分情况．在许多特定领域，尤其是多方面的专门学术方面，华先生的业绩还待别人今后做出全面深刻的介绍．

所有这一切都证明段先生写的回忆文章的附标题：天才和勤奋造就华罗庚成为一位伟大的数学家．

附　录　IX

关于华罗庚的第一篇数学论文

李 文 林*

摘要　本文说明了华罗庚《苏家驹之代数的五次方程式解法不能成立之理由》的创作过程，指出该文并非某些文献所说的是华的第一篇数学论文.

华罗庚撰《苏家驹之代数的五次方程式解法不能成立之理由》[1]（以下简称《苏》文）被有些学者认为是他发表的“第一篇数学论文”. 如《中国当代科学家传》[2]中的“华罗庚简历”就称它是华于“1929年”发表的第一篇数学论文. 其它一些文献对此虽未作这样明确的断语，但在介绍方式上往往也使人产生《苏》文是华罗庚发表的首篇论文之印象.

实际上，《苏》文的正式发表是在1930年12月出版的《科学》杂志第15卷第2期“来件”栏中. 而在此以前，即1929年12月华罗庚已在该杂志上发表过一篇数学论文——《Sturm氏定理之研究》[3].

《苏》文有无可能先在其它杂志特别是刊登过苏家驹原文的《学艺》上发表，而《科学》仅属转载呢?

经笔者查证为否. 苏家驹《代数的五次方程式之解法》发表于《学艺》1926年第7卷第10期. 查此后各期《学艺》上均未载过华罗庚的上述文章. 因此可以确定，华罗庚发表的第一篇数学论文不是《苏》文，而应为《Sturm氏定理之研究》.

---

* 见“中国科技史料”，3，1989，83—85.

不过，1929年5月，《学艺》第9卷第7期上曾刊登过一则简短的“更正”声明，现抄录如下：

“本志第七卷第十号载有苏家驹君代数的五次方程之解法一文，前半均合理论，但自第三页第十五行‘若将P_3写为二项式……’以下语意暧昧，显与次页下段矛盾；查此问题，早经阿柏（N. H. Abel）氏证明不能以代数学的方法解之；仓卒付印，未及详细审查，近承华罗庚君来函质疑，殊深感谢特此声明.”[4]

该则“更正”表明，华罗庚在1929年5月前已发现苏家驹在《学艺》上发表的文章有误，并去函“质疑”，但彼时他尚未完成证明苏家驹解法不能成立的严格论文，否则就不会仅寄一质疑函件了.

华罗庚在《科学》上发表的《苏》文前言中曾自述了该文创作经过：

“五次方程式经Abel. Galois之证明后，一般算学者均认为不可以代数解矣，而《学艺》七卷十号载有苏君之‘代数的五次方程式之解法’一文，罗欣读之而研究之，于去年冬亦仿得‘代数的六次方程式之解法’矣，罗对此欣喜异常，意为果能成立，则于算学史中亦可占一席地也，惟自思若不将Abel言论驳倒，终不能完全此种理论，故罗沉思于Abel之论中，凡一阅月，见其条例精严，无懈可击，后经本社编辑员之暗示遂从事于苏君解法确否之工作，于六月中遂得其不能成立之理由，罗安敢自秘，特公之于世，尚祈示正焉”[5].

根据这段自述可知，华罗庚对苏家驹《代数的五次方程式之解法》的研究是集中在“去年冬”至来年“六月中”这半年多的时间. 根据各方面情况综合判断，那么这里所说的“去年冬”应指1928年冬，而《苏》文当完成于1929年6月. 这样，就写作时间来说，《苏》文大致也在《Sturm氏定理之研究》之后，至少不会早于后者.

上述《苏》文前言还告诉我们，这篇论文不仅是对苏家驹《代数的五次方程式之解法》的否定，而且也是对华罗庚自己未发表的习作《代数的六次方程式之解法》的否定. 这段短短数百字的自述，使人强烈地感染到一种寻根究底的科学探索精神和谨

严密实的治学风格. 正是这种精神与风格，贯穿着华老整个学术生涯；也许，正是这段前言所反映的精神与风格，比较《苏》文的具体结果更使千里之外的熊庆来教授为之感动.《苏》文发表翌年，华罗庚即被调到清华大学数学系任助理员[2]，踏上了一个大数学家的漫长征途.《苏》文对华个人的命运来说是决定性的，因此往往比他第一篇论文《Sturm 氏定理之研究》更为人所知，这也是很自然的.

至于华罗庚第一篇数学论文《Sturm 氏定理之研究》的内容，主要是对求代数方程实根数的 Sturm 定理进行简化. 原 Sturm 定理是用已知函数与其导函数屡次作最大公约数运算来定方程的实根数. 华罗庚在他的这篇论文中指出此法对四次以上的方程“手续至繁”、“实际应用上，颇感困难”. 为改进 Sturm 定理，他定义了由已知函数及其导函数组成的所谓“Sturm 函数”，同时给出了利用行列式算法求 Sturm 函数及其正负并由变号数来确定方程实根数的新方法.

参考文献和注释

[1] 华罗庚:“苏家驹之代数的五次方程式解法不能成立之理由”.《科学》第 15 卷第二期，1930 年 12 月，上海.

[2] 顾迈南: 华罗庚，《中国当代科学家传》第一辑，第 91—104 页，知识出版社，1983 年.

[3] 华罗庚:“Sturm 氏定理之研究”，《科学》第 14 卷第 4 期，1929 年 12 月，上海.

[4]《学艺》，第九卷第七期，“社报”，第 3 页“更正”，1929 年 5 月，上海.

[5] 同 [1].

附　录　X

评译华罗庚致维诺格拉多夫的几封信

李文林*

（中国科学院数学研究所，北京，100080）

内　容　提　要

该文中首次发表的华罗庚（1910—1985年）致维诺格拉多夫（I. M. Vinogradov，1891—1983年）的四封信，写于1946—1950年间，最近由维诺格拉多夫的学生、俄罗斯科学院斯捷克洛夫数学研究所卡拉楚巴（A. A. Karatsuba）教授在整理维氏遗物时重新发现．原信用英文写成，内容反映了华罗庚与维诺格拉多夫的学术交往与深厚友谊，是研究华罗庚的生平、思想和中、俄数学交流史的珍贵资料．

关键词：华罗庚，I. M. 维诺格拉多夫，数学通信，评译

从30年代起，华罗庚在数论领域的研究工作受到了维诺格拉多夫（I. M. Viongradov，1891—1983）的深刻影响．I. M. 维诺格拉多夫是前苏联科学院院士，本世纪杰出的数论大师之一，长期担任前苏联科学院斯捷克洛夫数学研究所所长．维氏曾帮助年轻的华罗庚出版了数论专著《堆垒素数论》，并于1946年邀请华罗庚访问了苏联，对华罗庚的数学工作与才能极为赏识．华罗庚对维诺格拉多夫也抱着尊敬、感激之情．维诺格拉多夫比华罗庚大约20岁，他们结成了忘年之交，这种学术友谊，已成

---

* 见"中国科技史料"1，1994，60—65.

为中俄数学交流史上不可磨灭的一页.

华罗庚与维诺格拉多夫长期保持着通信联系. 他们通信的始末及详情尚待进一步调研. 不久前维诺格拉多夫的学生、斯捷克洛夫数学研究所卡拉楚巴(A. A. Karatsuba)教授在整理维诺格拉多夫遗物时发现的四封华罗庚亲笔信, 则为我们提供了这方面的珍贵资料. 这些信件已由斯捷克洛夫数学研究所副所长谢尔盖也夫(A. Sergeev)教授复制寄赠中国科学院院士、数学研究所陆启铿教授(复制件存中国科学院数学研究所资料室). 华罗庚的原信用英文写成, 内容涉及1946—1950年间与维诺格拉多夫的学术交往, 现由笔者译为中文, 并加以必要的评释说明, 希望对研究华罗庚的生平、思想及中、俄数学交流史能有参考价值. 此项工作受到陆启铿院士帮助, 谨此致谢.

一

1946年3月至5月, 华罗庚应维诺格拉多夫的邀请, 由苏联对外文化协会(VOKS)安排访问了苏联. 访苏期间, 华罗庚与维诺格拉多夫进行了深入的学术切磋, 同时结识了庞特里亚金(L. S. Pontryagin)、亚历山大洛夫(P. S. Alexandroff)、狄龙涅(B. H. Delone)、沙伐里维奇(I. R. Shafarevich)和彼德罗夫斯基(I. G. Petrovski)等一批著名数学家, 并广泛接触了苏联文化、知识界. 他在此期间曾分别到苏联科学院斯捷克洛夫数学研究所、莫斯科大学、列宁格勒数学研究所、格鲁吉亚科学院和阿塞拜疆科学院等做了多次学术报告, 讲题有《矩阵几何》、《多复变数函数论》、《自守函数论》、群论及中国数学史等. 华罗庚的研究工作受到苏联同行的高度评价, 他被誉为是"一位最年轻的对数学极有贡献的数学家. 我们由此可以看到这个古老的国家, 其前途充满着朝气和光明." 此次访苏之行对华罗庚的学术和思想有深远影响[1]. 在访问结束离苏前夕, 华罗庚给维诺格拉多夫写了如下的一封书面道谢信:

亲爱的维诺格拉多夫院士：

在这离别的时刻，请允许我向您表达深切的谢意．访问你们伟大的国家并向您这位数论大师学习，是我长期以来的梦想．现在承蒙您的建议和苏联对外文化协会的赞助，这一梦想已部分实现．

由于时间仓促，加上不熟悉贵国语言，使我此行未能更多地受益．现在我归期在即，也就是说，又将回去做我的旧梦．希望将来有一天我的梦想能再一次成为现实．那时，我将能作较长期的访问，并能用俄语与您进行交流．

您的论文如发表，请能尽快寄我一阅，尤其是关于估计式

$$\sum e^{2\pi i}(\alpha_n x^n + \cdots + \alpha_s x^s + \cdots),$$

$$\alpha_s = \frac{a}{q} + \frac{\theta}{q^2}$$

的证明，因为这与杜朗（P. Tuzan）的论文有关．

至于杜朗的论文，我尚未发现有严重的错误．当然，行色匆匆，而对于这样复杂的证明，也许需要更为仔细的检验．我完全理解您关于可能存在错误的“逻辑”观点．但那可能是因为用林尼克（Linnik）的方法不可能达到像您的方法所能达到的那样深刻的结果．

我十分高兴地获悉，我的小册子即将付印．希望该书能尽快出版，因为其中包含了我在1940年—1942年间所得到的一些结果的精确陈述．

您对我今后工作的任何建议，都将使我感到荣幸与感激．

我尊敬的老师，请接受我最良好的祝愿与最诚挚的问候．

您的忠诚的　华罗庚

1946年5月8日

于莫斯科国家旅社118房间

华罗庚是在1946年访苏时与维诺格拉多夫初次晤面．维氏在研究所、疗养地和自己家中热情接待了华罗庚．俩人在学术上

一见如故，维诺格拉多夫甚至见面不久就将一位匈牙利数学家（即华罗庚信中所说的杜朗）的论文交给华罗庚，请他帮助审阅、检查其中是否有错．不过对华罗庚来说，最重要的莫过于在此次访问期间获悉他的数论著作《堆垒素数论》已准备付印，这就是华罗庚信中提到的那本“小册子”．该书撰于 1940—1942 年间，时值战乱，国内难于发表，华罗庚遂将书稿投寄苏联科学院，立即引起维诺格拉多夫的重视．《堆垒素数论》初稿用英文写成，斯捷克洛夫研究所谢盖尔（B. L. Segal）教授等特意将其译成俄文．由于苏德战争，翻译工作延至战后才最终完成．华罗庚 1946 年访苏期间亲自进行了全部译稿的校对．该书 1947 年由苏联科学院正式出版，整个过程受到了维诺格拉多夫的支持．《堆垒素数论》后被译成中、德、匈、英、日等多种文字，成为本世纪数论经典著作之一，为华罗庚带来了世界性声誉．

二

华罗庚于 1946 年 5 月 25 日从苏联经伊朗、印度回到昆明，同年 7 月又从上海乘船飘洋，赴美国访问．在离开中国前夕，华罗庚给维诺格拉多夫写了一封信：

亲爱的维诺格拉多夫院士：

此次访问苏联，承蒙关照，感激之情，难以言表．回国后我已做了多次报告，介绍苏联之行的情况．我的报告的所有听众都对你们的伟大国家留下了深刻印象并记住了您（以及其他科学家）的名字．

回到中国，我发现她正处在非常困难的境地．战争仍在继续．年内想安静地呆在原地（北京）从事研究工作已不可能．因此我现决定去美国访问一年，大部分时间将在（普林斯顿）高等研究院度过．当然我很希望将来能有一年的机会重访你们伟大的国家．

我抵美后即会告诉您我在那里的地址．

我希望我的书能尽快出版. 目前我已开始翻译您的著作《数论基础》，预计将在四个月内完成. 顺致最良好的祝愿.

您的忠诚的　华罗庚

1946年7月7日

又及：附上拙稿《数学在中国》，最好是匿名发表.

华罗庚1946年赴美访问，原系国民党军政部资助，意在派华、曾（昭抡）、吴（大猷）三人率优秀青年学生赴美深造，培养科学人才.[2]而华罗庚致维诺格拉多夫的这封信，则反映了他本人当时出走国外的思想动机. 华罗庚是一个忧国忧民的知识分子. 他在苏联访问期间参加莫斯科红场"五·一"庆典时，曾发过这样的感叹："苏联人民"这种疯狂地庆祝着自己的节日，简直使我们苦难的中国人民无法想象. 再过四个月，双十节又来了，那个时候，中国人民是不是也能够兴高彩烈地狂歌欢舞呢？遥听着祖国内战的炮声，像千百万根针刺击向心上来. 啊，祖国!"[3]从苏联回国后，现实的巨大反差，使华罗庚对国民党的统治越感不满. 一方面受派于国民党政府，同时却不满并欲摆脱国民党的黑暗统治，这大概是华罗庚离开中国时的复杂心态.

华罗庚致维诺格拉多夫的这封信中还有两点引人注意的事实. 一是他曾打算并已着手进行维诺格拉多夫名著《数论基础》的翻译. 但赴美后工作与环境的变化使他未能继续此项计划.《数论基础》一书的中译本1952年才由商务印书馆出版，译者裘光明，书前冠有华罗庚的导读性前言"介绍《数论基础》"；另一个事实是，由这封信的附言可知华罗庚在1946年曾写过一篇《数学在中国》的文章，拟在苏联刊物上匿名发表，但经初步查考，此文后来似未正式发表.

华罗庚赴美后，先在普林斯顿高等研究院做研究，同时在普林斯顿大学兼教. 他抵达普林斯顿不久，即致维诺格拉多夫一函，全文如下：

亲爱的维诺格拉多夫院士：

我于两周前抵达普林斯顿并已致函列文生 (Livinson)[4] 先生，请他转告我目前的住址和对您的亲切问候. 欣悉您将应邀前来参加普林斯顿大学 200 周年纪念活动，很高兴又能有机会见到您这位数论大师.

此间数论研究似不太多，因为西格尔 (Siegel)[5] 即将离去. 每个人（至少几乎所有的人）都喜爱抽象的理论.

请告诉我您在《苏联科学院报告》（1944 年）第 93 卷第 2 期上发表的结果之证明，更具体地说是

$$S \ll P^{1-\rho_2}\ln^2 P_2, \quad \rho_2 = \frac{1}{3n^2\log 5n}$$

的证明.

我现在正在撰写系列论文《论维诺格拉多夫方法》，目的是向美国同行介绍您的深刻的方法，他们对此似乎了解不多. 顺致最良好的祝愿.

您的忠诚的　华罗庚

1946 年 10 月 15 日

于普林斯顿高等研究院

自 1946 年访苏以后，华罗庚每迁移一地，似乎都习惯于给维诺格拉多夫写封信. 甚至 1948 年 6 月间他到英国作短期访问时，也从剑桥给维诺格拉多夫寄去了一张问候明信片（图 1），信中告诉维诺格拉多夫他从 1948 年 9 月起在美国的新地址：伊利诺大学数学系. 华罗庚从 1948 年 9 月起受聘为伊利诺大学数学系正教授，直到 1950 年回国.

三

1950 年 2 月，华罗庚放弃了他在美国伊利诺大学的终身教授职位，毅然回到中国，并在返国途中发表了著名的《致中国全体留美学生的公开信》. 回国后不久，他即于 4 月 12 日给维诺格

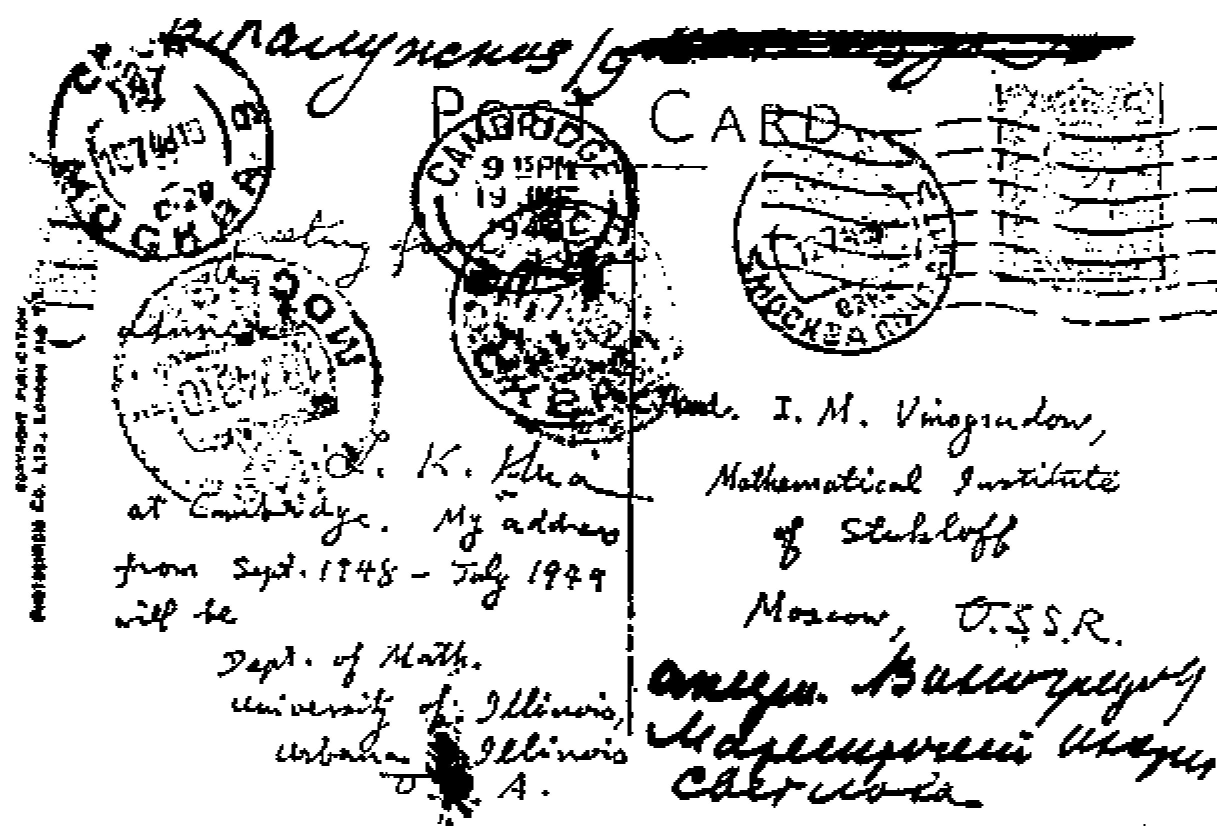


图1　华罗庚1948年6月在英国剑桥作短期访问时寄给I. M. 维诺格拉多夫的问候明信片

拉多夫写了一封意气风发的长信：

亲爱的维诺格拉多夫院士：

我非常高兴地告诉您：我已辞去了美国伊利诺大学教授职位，现在是在为我自己的国家服务，并且仍在北京清华大学任教授. 承蒙您和苏联对外文化协会的代表寄赠1946年以前的数学期刊，这些期刊近年来很有影响，我谨代表我的同事们表示谢意.

1946年访苏以后，由于个人的困难处境，我不得不在最黑暗的时期离开中国. 现在我们大家都愉快地生活在新制度下，我确信我们的数学事业从此可以得到平稳的发展. 对我来说，尤其令人高兴的是，当年我写在《堆垒素数论》一书扉页上的话

“祝中苏邦交永笃”

正在变成现实.

这里仍然十分需要数学书刊，目前得到苏联出版的书刊仍有困难．我们特别需要1946年以来的下列期刊：

《数学集刊》，

《数学通报》，

《数学进展》，

《斯捷克洛夫数学研究所汇刊》，

《梯比利斯数学研究所汇刊》．

如果您能帮助我们得到这些刊物，将不胜感激．

毫无疑问，我们的新制度受到了苏联所取得的成就的全面影响．我相信我们的科学同样也将受到苏联科学家卓越贡献的巨大影响．我希望数学能成为这方面发展的开端，而数学英雄维诺格拉多夫的影响则将是开端的开端．苏联数学对中国的影响比其它学科要早得多，您的学生华罗庚就是这方面的先例．请帮助我们实现我们的理想，请将您的论文的抽印本寄给我们以扩充我们的知识．我的同事中大约有60%的人正在学习俄语，不用太久，他们在阅读上就不会存在太多困难了．

现在莫斯科和北京之间的交通相当便利．我希望在不远的将来，我们能再次见面．欢迎您到北京来度假，这样我们就有机会向您学习．如果您愿意作这样的访问，我相信苏联对外文化协会和我们的中苏友好协会是能够提供帮助的．

请代我问候林尼克教授、谢盖尔教授和查达柯夫（Tchudakoff）教授．我的全体同事向您致意．

您的忠诚的　华罗庚
1950年4月12日
于北京国立清华大学

这封信充分反映了华罗庚当时的心境和振兴中国数学事业的理想与热情．使中国现代数学研究自列于世界科学之林，是华罗庚心中的宿愿．1946年他参观苏联科学院时，曾有感而发地写道：“我们中国的科学家，哪天亦能在我们自己的伟大的科学院

内，安心地埋头做着我们的研究呢?”[6]现在，他感到是施展宏图、报效祖国的时候到了．在这方面，他希望能得到维诺格拉多夫的帮助．华罗庚信中拟议的维诺格拉多夫访华之行虽未实现(维诺格拉多夫是不喜欢旅行的人)，但维诺格拉多夫对中国的数学事业确实给予了不少帮助，这已成为中俄科学交流史上的佳话．就在给维诺格拉多夫写这封信后不到两个月，华罗庚就被任命为中国科学院数学研究所筹备委员会副主任，1952 年，他又被正式任命为中国科学院数学研究所所长．从那以后长达 30 余年的时间里，华罗庚一直在推动中国的数学及其应用中发挥着领导作用．这 30 多年历经了动荡与曲折，道路远不像华罗庚在给维诺格拉多夫这封信中所想像的那样平稳、顺利，但华罗庚似乎从无怨悔，而是百折不挠地前进，为祖国的数学事业作出了功垂千秋的贡献．

参考文献和注释

[1] 华罗庚:《访苏三月记》,《时与文》杂志，1947 年第 14—17 期．

[2] 王　元:《华罗庚》,《世界著名科学家传记·数学家 I》，科学出版社，1990 年，第 68 页．

[3] 华罗庚:《访苏三月记》．

[4] Livinson 是当时苏联对外文化协会远东司司长，1946 年曾负责安排接待华罗庚访苏．

[5] C. L. Siegel 是德国数学家，1940 年为逃避纳粹统治而客居美国，曾在普林斯顿高等研究院工作，1951 年后回国．西格尔亦是本世纪的数论大家．

[6] 华罗庚:《访苏三月记》．

附　录　XI

N. 维纳与华罗庚通信七则

李文林

美国数学家诺伯特·维纳（Norbert Wiener，1894—1964）于1935年8月至1936年5月访华期间，结识了清华大学年青的数学教员华罗庚．当时，神童出身的维纳已是蜚声数坛的大学者，而自学成才的华罗庚则刚刚步入现代数学的殿堂．然而维纳以敏锐的眼力立即认识到华罗庚的数学天才，两位学者从此开始了长达数十年的友好交往．本文译、评麻省理工学院档案馆（The Institute Archive，MIT）保存的维纳与华罗庚的部分通信（除最早的二封外均属首次面世），它们反映了维纳对于华罗庚学术成长的重要影响以及这两位不同国籍、不同年龄的数学家之间纯真的科学友谊．

华罗庚于1936年8月到英国剑桥大学师从G·哈代（G. Hardy，1877—1947），这是他走向国际数学舞台的关键一步．我们已经知道，这一步是由维纳促成的*．以下的信件（1），(2)，(3）则提供了这方面的进一步实证．

(1) 华罗庚、徐贤修致维纳（1936.5.28）**

亲爱的维纳教授：

我们深深地感谢您善意有益的教导．我们唯一感到遗憾的是您不能在清华再多留些时候．然而在如此短暂的时间里，您已将

---

* 王元：《华罗庚》，第61—62页，开明出版社，1994.

** The Institute Archive，MIT，MC 22 (45).

我们引上了正确的研究道路．我们现在祝愿您和您的家人旅途愉快．

我们的论文已经完成，希望您能将它带到世界数学家大会上去*．您可将它寄给任何一家杂志发表，我们都不会有不同的意见．整个论文的要点已在引言中有所概括．

华罗庚希望能在哈代教授的指导下工作，您曾答应引荐．华现在想知道哈代教授是否同意．

盼尽早赐复．

您忠诚的

华罗庚、徐贤修

维纳在清华开设了一门系统的数学课程——三角学的发展（现代傅里叶级数与傅里叶积分理论），听众除了本科学生外，还有数学系的青年教师，其中包括华罗庚和徐贤修．与他人不同的是，除一般听课外，华和徐还受到了维纳的个别指导，并合作完成了一篇题为《论傅里叶变换》的论文，即信（1）中提到的希望维纳推荐发表的论文．也许正是在这一过程中，维纳考察了华罗庚的才能，并答应将他推荐给哈代．虽然尚未发现维纳给哈代的直接推荐信，但华罗庚确实于当年 8 月去了英国剑桥，并从那儿给维纳写了下面的短信．

(2) 华罗庚致维纳 (1936 年 9 月? 日)**

亲爱的维纳教授：

我已于 8 月 18 日抵达剑桥．请转告哈代教授我已在这儿．您能告诉我下一步该做什么吗？

尊敬您的

华罗庚

---

* 维纳在返美途中代表清华大学出席了在挪威召开的国际数学家大会．

** The Institute Archive, MIT, MC 22 (45).

华罗庚抵达英国剑桥时，哈代正在大西洋另一边的剑桥参加哈佛大学300周年校庆暨学术访问. 华罗庚首先给维纳而不是给哈代写上面这封信，这也充分说明了维纳在其间穿针引线的作用. 维纳对华罗庚的信立即作了认真的回复.

(3) 维纳致华罗庚 (1936.9.23)*

亲爱的华：

我已见到哈代教授，正如您已知道的那样，在哈代教授冬季学期回英以前，海尔布隆（Heilbronn）博士将负责照顾您. 哈代已与我讨论过您的部分工作，它们给他留下了极好的印象. 至于徐（贤修）和您与我合作的论文，只待新学期开始，工作走上正规以后，我就会仔细审阅并寄给适当的刊物去发表.

我希望您在英伦呆得愉快. 一点个人的建议是：千万小心那里的天气. 虽然北京的冬天比剑桥严寒，然而剑桥却十分潮湿、阴冷. 务必保持室温并穿得厚实些，否则肯定是冒险. 讲到这一点我就很动情，因为拉马努金（Ramanujan）的早逝，实在与对这类小事的疏忽大意很有关系啊！祝您全面成功，并希望您在回国时能途经麻省小聚.

您忠诚的

诺·维纳

由上述信件可知，维纳与哈代商议为华罗庚在英国的访问作了具体、周到的安排. 该信字里行间流露着维纳对华罗庚深情的关怀和殷切的期望. 维纳同一天给清华大学校长梅贻琦写信时，也明确表达了他对华罗庚的厚望，信中说道："我发现这里对过去几年里中国所取得的科学进步表现出极为浓厚的兴趣. ……特别是华（罗庚）先生的工作正受到越来越多的好评，……我预祝

* The Institute Archive, MIT, MC 22 (45).

他前程远大"*.

华罗庚没有辜负维纳和众人对他的期望．他在剑桥留学期间即完成了十几篇论文，在华林问题、堆垒素数论等方面做出了令外国同行瞩目的工作．1938年，华罗庚在抗战烽火中回到中国，任教西南联大，在极其艰难的环境下坚持科学研究并取得了更为系统、卓越的成果，从而使自己跻身于世界一流数学家的行列．对于这一切，维纳始终予以关怀注目，他在1944年为帮助华罗庚访美而写给美国国务院的一封推荐信清楚地反映了这一点．

(4) 维纳致美国国务院签证部 (1944.8.15)**

亲爱的先生：

我从随信附上的函件中得悉：如获我方许可，目前正在中国昆明避难的清华大学教授华罗庚将有机会来美国从事研究工作．

华罗庚先生是我1935年—1936年间在清华大学任教时的学生之一．从那以后，他曾留学英国并已成为数论方面的专家，而现在无疑是中国的领头数学家，同时也是在世界数学界受到尊敬的人物．

我认为华罗庚先生是一位完全值得信赖的人，我欢迎任何可以帮助他来到美国从事理论研究和进行科学交流的举措．

如果他愿来麻省理工学院，我们将乐意向他提供一切优遇．

尊敬您的

数学教授　诺伯特·维纳

华罗庚赴美访问两年后（1946）才成行，最终是利用了国民党军政部的资助***．但从上述维纳的信件可知，实际上华罗庚早在1944年即已开始酝酿、联系赴美访问事宜，他当年7月写给

---

* The Institute Archive, MIT, MC22 (45).

** The Institute, Archive, MIT, MC22 (66).

*** 王元：《华罗庚》，开明出版社，1994.

维纳的一封信更多地披露了这方面的一些情况.

(5) 华罗庚致维纳 (1944.7.17)*

亲爱的维纳教授:

很久没有给您写信了. 我有几位同事最近受贵国政府之邀将赴美作访问教授. 我很羡慕他们的机会. 我的科学资历似与这些同事相当(当然或许还不够真正的教授水平). 我想请您在可能情况下向美国国务院作一推荐. 倘能成功, 我将再次聆受您的指教.

另外, 我已收到外尔(H.Weyl)教授访问普林斯顿高等研究院的邀请. 1500美元一年的资助似乎不敷旅费及日常开销. 因此向您提出上述请求. 我曾为我的国家做过一些与战争有关的工作, 现在可能获准出国. 我很希望能到美国来. 我现在不仅对纯粹数学而且对机器运算感到兴趣, 您在这方面也是权威, 而麻省理工学院则是该领域最重要的中心之一.

请代向斯宾塞(D.C.Spencer)教授致意, 他是我在剑桥的同班同学.

向维纳夫人致以最良好的祝愿.

您忠诚的

华罗庚

又及: 如蒙首肯, 请电告.

虽然华罗庚后来未能到MIT访问, 但维纳给美国国务院的推荐信对于他访美成行无论如何具有正面的意义, 这封信同时为我们了解华罗庚科学研究工作的国际影响提供了权威的说明. 华罗庚于1946年10月初抵达美国, 在普林斯顿高等研究院工作约两年后, 于1948年9月受聘任伊利诺大学数学系教授. 他在整个逗留美国期间始终与维纳保持着亲密的联系, 这从以下的信件

* The Institute Archive, MIT, MC22 (66).

(6), (7) 可见一斑.

(6) 华罗庚致维纳 (1946.10.12)*

亲爱的维纳教授:

极为高兴地获悉您本月15日至22日将在纽约, 请告知我们什么时间在何处可以相见. 致最良好的祝愿.

您忠诚的

华罗庚

又及: 徐贤修向您问候.

(7) 维纳致华罗庚 (1949.6.2)**

亲爱的华:

我在您的寓所度过了愉快的时光, 我愿在此向华夫人和您本人表示谢意. 我同时非常高兴地看到您所赢得的巨大成功. 希望我们将来能在对整个世界来说更为欢乐的日子里在中国再见.

您忠诚的

诺·维纳

由信 (7) 可知, 维纳甚至曾到伊利诺华罗庚家里作过客. 当时, 中国国内的形势正在发生重大的转折, 解放战争接近尾声, 国民党败局已定, 新中国即将诞生. 在这样的时刻, 两位学者促膝交谈, 双方必有感慨, 可惜内容不知其详. 我们所能看到的, 只有维纳事后写给华罗庚的上述信件中那段意味深长的结语. 这封信成为他们二人之间迄今所能发现的最后一封通信. 华罗庚于1950年初毅然离美回国, 开始了缔造新中国数学的伟大而艰巨的事业. 由于中美关系的中断, 他与维纳的联系也未能继

* The Institute Archive, MIT, MC22 (72).

** The Institute Archive, MIT, MC22 (99).

续（至少尚未发现他们在 1950 年以后的任何通信）. 维纳于 1964 年逝世，他在给华罗庚最后一封信中表示在“对整个世界来说更为欢乐的日子”再次访华的愿望未能实现. 但正如从以上选择的通信可以看到的，这两位学者之间超越国界的友谊，已经成为永载中美科学交流史册的一段美而感人的佳话.*

* 笔者衷心感谢美国麻省理工学院档案馆和 Dibner 科学技术史研究所对本项调研所给予的支持.

附 录 XI

30年代N.维纳访问清华大学函电始末*

李旭辉

摘 要 该文引用1934年—1937年间美国数学家N.维纳与清华大学之间的一批往来信件和电报，详细阐明了维纳访问清华的前后经过. 文章重点介绍了维纳访华的成因、维纳与清华大学数学研究和电子计算机发展规划的关系以及对华罗庚的指导提携，为了解20世纪30年代清华大学的发展状况提供了宝贵的第一手材料.

关键词 N.维纳，清华大学，函电

中图法分类号 01-1

控制论的创始人、美国麻省理工学院（MIT）数学系教授、著名数学家诺伯特·维纳（Norbert Wiener）曾于1935年—1936年应邀来清华大学访问讲学，这不仅是清华校史上的一件大事，在现代中外科技交流史上也有着重要的意义. 本文利用一批原始的往来函电[1]，揭示了维纳访华的来龙去脉，并从一个侧面反映出当时清华大学的发展状况.

1. 来自清华的邀请

关于维纳访问清华大学（以下简称清华）的成因，一般史料仅简单提及清华校长梅贻琦和数学系主任熊庆来等人的盛情相邀. 事实上，当时的电机工程系教授李郁荣同维纳的友谊以及他

* 笔者特别感谢美国MIT档案馆的E.Kaplan女士，96岁高龄的顾毓琇先生以及上海华东师范大学数学系陈志杰教授所给予的热诚帮助.

所做的努力起到了关键性的作用，这从 1934 年底李郁荣给维纳的长信中可以得到印证：

1934 年 12 月 4 日　李郁荣致维纳

尊敬的维纳博士：

上次写信给您时，我正准备动身来北平，而如今，近五个月过去了，我已在清华安顿下来．我一直很忙，没有时间去做研究工作，但我很乐意教书．我们的工学院有了相当大的扩展，添置了大量电工和机械装置．就在昨天，我们搬进了新建成的电机工程馆．我觉得一切都很顺利，有许多有趣的工作等待着我们去完成．

……

您是否还记得，我曾说过如果我在某个大学里找到了稳定的职位，就会邀请您来中国演讲数学吗？今天这封信就是关于这一邀请的．从这边来说，我觉得只要不出现无法预料的困难，为您争取到正式邀请是比较容易的．我以私人名义给您写这封信，想了解一下如果向您发出了邀请并且时间合适的话，您是否会接受它．

我已经和工学院院长顾毓琇博士、物理系的任之恭、萨本栋博士以及数学系的曾远荣博士商谈过，建议向您提供一个研究职位．他们都非常赞成我的建议，并表现出很高的热情．

……

关于研究方向，我还不能完全确定，但至少可以说我们相当多的工作会使您感兴趣．数学系的曾远荣（芝加哥大学博士）一直紧密追随您的工作，他渴望能有机会与您一起研究．他已经在《美国数学会公告》上发表了一些成果．或许您还记得赵访熊，MIT 的毕业生，他在最新一期的 MIT《数学和物理学杂志》上发表了一篇论文．物理系有任之恭博士（毕业于哈佛大学和 MIT）、萨本栋博士和吴有训博士（他刚刚结束了在 MIT 的一年休假回到清华）和其他一些学者，他们都非常希望见到您．他们

都相信您给我们的帮助将极富价值. 电机工程系的顾博士将研究算子分析，我自己准备研究电网络理论. 如果您愿意，您可以就傅里叶级数和傅里叶积分或是您挑选的其他任何专题开设讲座. 关于哲学方面的报告将会受到哲学系的热烈欢迎. 因此您已经看到，这里有足够多的工作让您感兴趣.

清华以工学院拥有的设备和装置而自豪. 数学系的图书馆与MIT 的一样完善. 任博士认为物理系的图书馆要比哈佛大学的更加完善一些. 我相信，您会发现这些图书馆为研究工作准备了充分的资料.

……

假如这一计划能够实现，我们希望您至少能来访一年，而且如果您觉得有可能待得更长些，我们会更加欢迎. 实际上，我们打算请您永久地留在这儿. 我不清楚您在 MIT 的安排如何，但我们真诚地希望您能在明年 8 月开始的 1935 学年里来访.

我们已经邀请了法兰西学院的 P.Langevin 教授和哈佛大学的 Birkhoff 教授在不同时期来访. 法国的 Hadamard 教授计划于下学期来访半年. Osgood 教授如今正在北平大学，他的夫人也已随他同来.

……

我们期待着在这里与您相见. 我几乎没有耐心等待这封信寄到您手上，可惜现在你我之间尚未开通航空邮政服务. 我将非常乐意提供您所需要的其他任何信息.

希望能收到您肯定的答复，如可能，请通过电报联系. 我的电报地址是：

Y.W.LEE
BUREDUC PEIPING

请向维纳夫人和 Bush 博士转达我最诚挚的问候.

真诚的

李

李郁荣，广东新会人，1904 年 4 月 14 日出生于澳门，1924 年至

1930 年在美国麻省理工学院电机工程系求学. 经其博士导师 V. 布什（Bush）介绍，结识了数学系教授维纳并开展合作研究，设计发明出新的电网络装置，并获得美国专利. 在这个过程中，他们两人建立了深厚的友谊. 李郁荣获得博士学位后，应顾毓琇之邀回国工作，他自 1934 年 8 月起担任清华大学电机工程系教授[2].

这封信是他在清华定居后写给维纳的第一封信. 为了促成维纳来访，他事先做好了一些必要的准备工作，在信中除了重点介绍清华的科研水准和设备条件，还强调了清华教员较为优厚的经济待遇和生活条件.

信中提到的法国物理学家 P. 郎之万和数学家 J. 阿达玛都来了中国，阿达玛在 1936 年 3 月由法抵沪，4 月初至 6 月底在清华访问讲学. 哈佛大学数学系的 G.D. 伯克霍夫则因故未能成行.

1935 年 1 月 7 日，维纳复函李郁荣，欣然表示接受，同时还发出一份电报：

“愉快接受邀请，访问自 8 月开始.”

当时，中美之间信件的单程传递速度接近一个月，维纳显然是在接到李郁荣的邀请之后立刻就回信了. 他毫不犹豫地决定访华的原因不外以下几点：一、他是个具有国际主义观点的学者，对东方文化向往已久；二、清华在 1928 年改建为国立大学后，实力迅速增长，30 年代初已成为中国最大的高等教育和科学研究中心之一. 维纳在清华不仅可以充分阐发自己的学术思想，还有机会展开合作研究；三、他希望能暂时改变环境，作一番调整. 在 4 月 8 日给李郁荣的一封信中，他谈到了东方之行对他个人的意义：“今年我非常疲惫，几乎没做什么新的工作. 有一大堆的材料需要整理. 能在贵校悠闲的环境中完成这项工作，对于我和我的健康都将极为有益.”

MIT 校方很快就批准了维纳来华访问的申请. 而当时的中日关系正处于紧张状态，布什通过特殊渠道对中国局势进行了细

致的了解分析之后，认为一段时间内不会有太大的波动，从而打消了维纳的顾虑（1935 年 6 月 12 日，布什致维纳）.

2 月 14 日，校长梅贻琦代表清华大学向维纳发出了正式邀请电：

“热诚邀请前来清华，担任下一学年的研究教授.”

维纳回电正式接受邀请. 此后，联络和准备工作主要通过李郁荣来进行.

5 月 9 日，梅贻琦致函维纳，阐明清华向维纳提供的各项待遇，并告诉维纳，清华已通知美国庚款的驻美管理机构——纽约的华美协进社向维纳预付 1040 美元的旅费，李郁荣也已在自己的住宅附近为维纳全家预订了住所.

2. 开设数学课程

1935 年 2 月底，维纳按照李郁荣的要求，寄来了他的论文目录和抽印本，以及清华数学系图书馆里应当订购的期刊的清单. 关于数学讲座内容，他计划讲授现代分析学和三角学的进展. 李郁荣收到之后，立刻将这些信息转交给熊庆来.

1935 年 3 月 25 日　熊庆来致维纳

尊敬的维纳教授：

得知您已接受邀请，我感到非常荣幸. 我的同事和学生们也为此激动不已. 请允许我利用这一机会表达我诚挚的欢迎.

下个学期，我们准备开设几门有关现代数学专题的高级课程. 李郁荣博士告诉我，您建议讲授现代分析学和三角学的进展. 后者是最令我们感兴趣的大课题. 尤其令人高兴的是，它将由该领域中的一位权威来讲授，他以大量重要的成果丰富了这一领域. 考虑到现代傅里叶积分理论是一个崭新的领域，我们觉得比较明智的做法是让学生了解常用的技巧并充分地训练他们，使他们能在该领域开展初步的研究. 我们真诚期望从与您的研究有关的讲座中受益，因此希望把重点放在三角学的进展上. 我们系

里的高年级学生对实变和复变函数的基本理论都十分熟悉，但是在过去的两年里，我们没有开设过傅里叶级数和积分方面的课程．如果请您就三角学的进展开设为期一年的课程，以便开展详尽的讨论，并将傅里叶级数和积分的经典理论也容纳在内，不知您认为是否妥当？Titchmarsh 的书的内容与我们定期开设的一些课程是一致的．如果三角学能成为一门为期一年的课程，我们是不是可以略去现代分析学？对于三角学的进展，您能否告诉我每周上课的次数以及您希望上课的时间？

也许您已注意到我校出版的一份季刊——《理科报告》．如果您能将自己的成果发表在上面的话，我们将感激不尽，这些成果也定会给读者以启发并提高这份刊物的科学价值．我将另函寄上目前为止该刊已出版的各期．

期待着在北平欢迎您的到来．

您忠实的

熊庆来

1935 年 5 月 16 日　维纳致李郁荣（代复熊庆来）

……

熊教授在课程方面的建议与我本人的想法完全一致．这样，我就要为下学年开始时立即讲授傅里叶级数作好准备．我建议你们的书店能预订足够数量的下列书籍：

Zygmund 关于傅里叶级数的著作，在华沙出版；

我关于傅里叶积分的著作，剑桥大学出版社出版；

Paley 与我合著的《复数域上的傅里叶积分》，纽约的美国数学会出版．

至于应当订多少，您比我更清楚．

……

熊庆来于 1926 年到清华大学工作，1931 年休假出国，赴巴黎庞加莱研究所访问，研究整函数和亚纯函数，1933 年获得法国国家理科博士学位．在此期间，他曾于 1932 年赴瑞士苏黎世

参加第九届国际数学家大会，与维纳有过接触，两人是分析方面的同行．

当时，维纳由电路分析和通讯工程的实际问题出发，在广义调和分析学上取得了重大成就，一举成为世界知名的分析学家．调和分析又称傅里叶分析，其主要内容就是关于傅里叶积分和级数的理论．两封信中提到的几位数学家和著作，分别指英国数学家 E. 梯奇玛什的《傅里叶积分理论导引》、波兰数学家 A. 齐格蒙德的《三角级数》以及维纳在剑桥大学访问期间完成的《傅里叶积分及其特定应用》，《复数域上的傅里叶积分》一书则是维纳在 1933 年荣获美国数学会颁发的博歇奖之后，受邀为《讨论会丛书》撰写的，书中综合了他与英国数学家佩利的合作成果．这四本书都是本世纪上半叶调和分析领域的经典著作．

维纳到清华后，如约为数学系师生授课，系统讲解傅里叶积分、傅里叶级数和勒贝格积分的理论，参加听课的有赵访熊、曾远荣、华罗庚、徐贤修、吴新谋、段学复和庄圻泰等．维纳所讲的内容既有他以前的研究成果，也有当时正在思考的课题，而在讲课过程中，他不但传授数学知识，还注意在思想方法上进行指导，这些对于清华年轻学者日后的学术发展起到了积极的作用．此后，傅里叶级数论和近代三角级数论正式列入清华研究院理科研究所算学部的选修科目[3]．

3. 电子计算机发展计划

维纳不仅仅是一位纯数学家，他的研究工作往往以物理和工程问题为实际背景．他和李郁荣在电网络综合方面的合作，以及在调和分析领域的探索都是例证．与布什的密切联系也使得他比较熟悉电子计算机（数值积分器）的进展情况．而作为清华大学的发展计划之一，引进电子计算机摆在了议事日程上．1935 年 4 月 19 日，顾毓琇致函维纳：清华电机工程系考虑添置一台小型的积分器，请他与布什联系，帮助制造一台，并告知开销的数额．清华大学希望维纳在来访期间能帮助安装好积分器．另外，

顾毓琇还委托维纳转交一封信给布什，布什于 1935 年 5 月 26 日回复：

……

收到您 4 月 19 日的来信后，今天上午我与维纳教授进行了商谈，特别是关于制造小型积分器作为研究之用的计划．这是您非常渴求的事情，但我觉得这项工程的花费要超出您的想象．宾夕法尼亚和曼彻斯特都已建造了这种分析器，奥斯陆也有一台正在制造之中，这些工程的开支都相当巨大．可惜，要制造一台规模有限而仍能发挥实际功用的机器似乎是不现实的．我们自己的机器里已有六部积分装置，而且还将需要更多，因此我们建议每台新机器所包含的积分装置数量都应比我们的多．

基于此，我认为如果您的资金确实有限的话，更合适的办法是仿制一台我们的光学积分器．您应记得维纳博士曾对它提出过原始的建议，而如今它的第三种型号已经接近完成，我们相信其使用价值很大．仿造一台的费用不如原机的费用高，而且我确信它会有极为广泛的用途，需要许多工作人员才能充分发挥其功能．在一定程度上，这种评价也同样适用于我们正在建造的求解联立代数方程的机器．

我们的合作还可以沿着另外一条路线进行．几年来，我一直考虑制造一台求解非线性代数方程的机器，其规模仅仅取决于元件的数量多少，而且不会太复杂．其原始思想出自数年前有人在一份不起眼的刊物上所发表的短篇注记．至今尚未有人对此进行过尝试，我想这定会是件非常有趣的事情．如果您在这方面从事一些领先的工作而不是去寻求那些已有机器的复制品的话，也许更为合适．当然，这要取决于贵校的总体规划，以及您认为开展一项工程的可能性大小．

对您来说，最好的办法无疑是在维纳教授到达之后就此与他进行探讨，他了解所有的这类机器，也能在费用问题上为您提供很好的建议．在他临行前我将请他留下一个简短的电报码，以便在时间紧迫的情况下通过电报向我询问，不过我认为他完全可以

凭借记忆和估量给出您所需要的全部信息.

……

1935 年 6 月 1 日　布什致维纳

我写这封信给您，以便您能有更多的信息告诉顾［毓琇］.……我可以告诉您我们的某些开支数额，也愿意让顾知道，但我希望他能作为秘密来保守，只透露给那些他要一起商谈的职员，因为我不愿让别人出于商业目的而了解到花费的数目.

第一台微分分析器耗费了我们 25000 美元，而这只是实在的开支，即薪水和购买设备之类的支出，不包含管理费用，管理费可能与前者同样多. 宾夕法尼亚大学的分析器更加庞大而精良，是由政府出资建造的，耗费是我们的两倍.

……

不知顾所需要的装置是否有可能在中国建造起来？我猜想他们拥有一些基本的机械设备，可以通过购买一些必要的部件而不断发展. 我们乐意尽自己所能向他们提供设计方案，尽管我们的装置中有许多是根据草图而不是现成的图纸建造起来的.

我需要进一步了解顾的计划和资源情况，才能向他提供全面的建议. 我感到，进行速度对于他的规划来说并非主要的因素，所以在采取任何举措之前，您最好就此事与他详细谈谈. 尤其是我认为，如果他准备深入下去的话，他的计划就不应局限于建造一台仪器，而应是一个用机械进行分析的项目，在这一点上，您可以给他很大的帮助.

……

从上面两封信可看出，布什是愿意帮助清华建造合适的计算装置的. 20 年代末，布什被 MIT 提升到行政岗位，负责全校实验室的管理和发展. 也正是从那时起，他开始致力于初级模拟计算机的研究工作[4]. 19 世纪中叶，英国数学家巴贝吉设计制造出一套计算装置，具备了现代电子计算机的雏形. 但是，这种计算机属于纯粹的机械装置，通过机械的转动和相互作用而求出数

字运算结果，所以虽然实现了自动化，效率却很低，而且很容易出故障. 布什首先在设计思想上迈进一大步，用随时间变化的物理量来代替数字，使计算机从机械数字机时代走入模拟机时代. 同时，他又充分利用工程技术的新成果，以电力系统来驱动巧妙组合起来的机械装置. 这样的计算机不仅大大提高了运算速度，降低了故障发生率，更可以完成求解常微分方程等复杂的数学计算问题. 按照这种思想和方法设计的计算机被成为布什机.

顾毓琇等清华学人以发展眼光投向电子计算机，是非常具有远见和首创性的. 但是正如布什所担心的那样，清华的计算机发展规划最终由于资金不足而作罢[5]. 随后而至的抗日战争，更使清华乃至整个中国工程技术界与这项划时代的先进技术失之交臂.

在清华，维纳和李郁荣的再度合作也正是试图改进布什研制的初级模拟计算机，采用高速度的电子线路来取代靠简单电路驱动的机械装置. 这种改进涉及到一种全新的技术，要将电路的输出信号作为新的初始信号反馈回电路之中，在当时的理论和设备条件下，短期内是无法解决的. 但是，他们的合作仍然具有积极意义，特别是引发了维纳对反馈问题的全面思考，40 年代，反馈理论成为控制论的核心内容之一[6].

为了将李-维纳网络等研究成果变成专利，维纳和李郁荣在 1936 年 2 月 14 日共同写信给美国专利局，详细介绍他们的 3 项发明，全信长达 14 页. 后来，他们还多次前往天津，与美国领事馆的文化官员进行交涉. 最终，李-维纳网络和两人在清华合作研制的新式继电器都获得了美国专利.

4. 提携华罗庚

1936 年 5 月 28 日　华罗庚、徐贤修致维纳

尊敬的维纳先生：

对您所给予的和善而有益的指导，我们深表感谢. 唯一的遗

憾是您不能在清华多停留一些时间了. 不过此前的时间虽短，您却已将我们引入了研究的正轨. 祝愿您和您的家人旅途愉快!

我们已经完成了论文，期望您能把它带到国际数学家大会上去. 您可以将它投给任何杂志去发表，我们不会有什么意见. 整篇文章的要点已在序言中作了概括.

华罗庚先生希望在哈代教授的指导下开展工作，您也曾答应引荐他. 华先生现在想知道哈代教授对此事是否表示了异议.

期待着尽早收到您的答复.

您真诚的

华罗庚

徐贤修

维纳在清华为数学系师生讲授傅里叶分析，在他的指点下，华罗庚与好友徐贤修就该课题合作完成了“关于傅里叶变换”一文，即信中所提到的论文. 维纳回国后，将其推荐发表在 MIT 的《数学和物理杂志》上. 这是华罗庚当年在国外发表的 5 篇论文之一. 文中特别表达了对维纳的感激：“我们感谢维纳教授在清华大学给出的傅氏变换课程，我们必须借此机会对他的有价值的建议致以深深的谢意.”[7]

自学成材的华罗庚从金坛到清华后，跟随杨武之处学习了哈代和李特尔伍德的数论，重点研究华林问题. 维纳则于 1913 年—1914 年和 1931 年—1932 年两度赴剑桥大学访问研究，接受过哈代和李特尔伍德的指导帮助. 维纳认为，在获得博士学位以后，哈代是对他一生的数学研究影响最大的人. 维纳的支持和推荐，使得华罗庚有机会直接在哈代等人的指点下钻研，接触到剑桥学派的最新成果. 在华罗庚的学术生涯中，这无疑是与进入清华同样关键的一次机遇.

1936 年夏，维纳结束了在清华的工作，取道欧洲回国. 途中，他作为 MIT 和清华的共同代表，参加了在挪威奥斯陆举行的第十届国际数学家大会. 华罗庚则在同时获得中华教育文化基金会的资助，赴剑桥大学访问. 而当时哈代恰好应邀到美国，参

加哈佛大学300周年校庆，所以华罗庚未能及时见到哈代．维纳一如继往地关心着清华和华罗庚的进步．

1936年9月　华罗庚致维纳

尊敬的维纳教授：

我已于8月18日抵达剑桥，请转告哈代教授我已到此．您能告诉我下一步我该做什么吗？

华罗庚　敬上

1936年9月23日　维纳致梅贻琦

尊敬的梅校长：

作为清华的代表，我参加了奥斯陆的数学家大会，今寄上关于该会的一份迟到的报告．俄国和意大利未派代表出席会议，德国代表的数目也大大减少，这些对会议都有所影响，不过会议还是开得非常成功．受邀宣读的论文数量多得超乎寻常，其中最成功的，无论是表述还是内容，也许要算法兰克福大学的Siegel教授的了．我自己就我在清华期间有关空隙定量的工作做一次报告．会上的招待安排得使人非常尽兴，可能会成为将来的会议所难以仿效的榜样．

华先生如今正在剑桥大学，我与哈代教授（眼下正在美国）商量过对他的培养措施．哈代教授请Heilbrenn博士接待华罗庚先生并帮助他安顿下来．哈代教授将在第二学期返回剑桥．

在中国过去几年取得的科学进展中，我发现了相当数量的重要成就．我尽己所能指出这些成就已经达到的最高水准，以及依靠目前的人才在不久的将来所能达到的更高水平．特别值得一提的是，华先生的工作正得到越来越高的评价．最近，他投给《伦敦数学会会刊》的论文出了点问题，主要涉及论文的篇幅．但随后寄去一篇注记，使人们清楚地意识到文章包含的材料极为重要，不可能作有效的删减．我期待着他走向远大的前程．

……

5. 依依别后情

维纳对华罗庚的赏识以及对中国数学界的关注跃然纸上. 而在信末, 维纳进一步表达了对清华以及中国的怀恋和祝愿:

在如今的形势下我们不可能指望一切都进展顺利, 不过我所收到的一封北平来信说明清华的现状可以暂时得以维持, 诚望如此. 在清华的一年里, 我培养起了对贵国和贵校的真挚感情, 并完全为我的妻子所共享.

最近, 我在哈佛大学 300 周年校庆仪式上见到了萨 [本栋] 教授. 您也知道, 贵校有位苏先生在我校的化学系学习, 我每周都要与他进行一小时的会话, 以便巩固我的北平话水平. 您瞧, 我正期望着将来有机会再去中国呢. 谨向贵校及您全家致以最美好的祝愿.

您真诚的

诺伯特·维纳

1936 年 12 月 4 日　熊庆来致维纳

维纳教授先生:

自您离开后, 我和我的同事经常想念您, 我们不能忘记您在清华出色的教学和您对我们的国家所表达出的同情. 从您最近写给梅先生的信中我们高兴地得知, 您经过欧洲的旅程后已经圆满地回到家中.

我们的新出版物《中国数学会学报》的第一卷已经问世, 我们已寄给您一本以及 100 份您的论文的抽印本, 它们应该已经送到您手中.

今年, 清华数学系有一些变化. 首先, 我们不再有外籍教授, 其次如您已经知道的, 我们的许多研究生或者到了欧洲, 或者到了美国: 华先生去剑桥, 许先生去伦敦, 庄先生去巴黎, 施

先生去了哈佛大学，* 但同时又来了好几位其他大学或清华其他系的学生，现在我们系中有 30 名“大学本科生”. 在这些年轻人中，有几位显然在数学方面有特殊的才能.

与去年相比，中国的政局形势有了不可比拟的改善. 尽管在绥远省还有麻烦，北平总是宁静的，而且我们大学中一切运转正常.

最后祝您家中一切平安，我的夫人和我一起祝您和维纳夫人一切顺利，并致以新年的祝愿.

熊庆来

中国数学会于 1935 年 7 月成立后，又于 1936 年创刊发行了《中国数学会学报》，成为中国数学走向世界的历史见证. 熊庆来教授是学报的六位编委之一，他将维纳的论文 A Tauberiangap theorem of Hardy Littlewood 推荐发表在 1936 年 8 月的学报创刊号上. 除维纳的论文之外，第一卷还刊登了胡坤升、华罗庚、方德植、陈建功、曾炯之、江泽涵、申又枨和苏步青等人的文章，9 篇论文全部用英文写成[8].

维纳回国后，还鼓动著名数学家、普林斯顿高级研究院终身教授冯·诺伊曼到清华访问，诺伊曼夫妇对此很感兴趣. 1937 年 5 月 4 日，维纳专门就此事同时致函李郁荣、梅贻琦和熊庆来，郑重推荐冯·诺伊曼作为清华大学的访问教授. 遗憾的是，两个月后日本侵华战争的全面爆发，破灭了所有人的梦幻.

参 考 文 献

[1] MIT Faculty and Academic Staff Records Office, Institute Archieve and Special Collections, KIT Library, MC 22 & AC 103.

[2] 李旭辉. 李郁荣博士传略. 中国科技史料，1996，17 (1).

[3] 清华大学校史研究室. 清华大学史料选编二 (下). 清华大学出版社，1991，629—631.

[4] N. 维纳. 我是一个数学家. 上海科学技术出版社，1987，108—113.

* 这里提到的几位学者分别指华罗庚、许宝騄、庄圻泰和施祥林.

〔5〕 顾毓琇先生给笔者的信，1996 年 12 月 25 日.
〔6〕 张奠宙，李旭辉. 维纳和李郁荣. 见：李迪主编. 数学史研究文集（第四辑）. 内蒙古大学出版社与九章出版社，1993，104—108.
〔7〕 王元，华罗庚. 北京：开明出版社，1994，61.

附 录 XIII

华罗庚致陈立夫的三封信*

袁向东

摘　要　这里公布了华罗庚于20世纪40年代写给当时的教育部长陈立夫的三封信．其内容主要涉及如何发展中国的数学事业，也谈及出国考察，申请科研补助金及对数学的看法．是研究华罗庚在抗战时期数学活动的重要史料．

关键词　华罗庚，陈立夫，三封信

中图法分类号　01—1

华罗庚是我国现代数学发展中最重要的人物之一．他在数论、代数与几何，以及复分析等众多领域留下了世界一流的成果；在数学教育和数学应用方面的影响深远[1]．作为一名学者，华罗庚并不属于只关心个人的成就而甘于学术象牙塔之寂寞的一介书生．从下面三封致陈立夫的信函可知，早在本世纪40年代初，华罗庚就开始关注全国性的学术组织工作；其中对数学发展和对办数学研究所的看法还不乏独到之处．当然，他的这些抱负只是在解放后出任中国科学院数学研究所所长之后才得以施展[2][3]．

1　"治本宜效七年之病求三年之艾之道"

我们先录下华罗庚1940年3月4日写给当时的教育部长陈

---

* 见"中国科技史料"，1，1995，60—67．

华罗庚三封原信书写格式按当时习惯，但又不甚统一规范，尤其是标点的使用．现应编辑部要求，一律据信的行文内容加上标点，以方便阅读．

立夫的信[①]：

立夫部长先生赐鉴：

日前报载政院议决之本届庚款留英生名额，较庚款会原议略有更变．窥其用意殆为抗建需要孔殷故略偏应用．及当务之急，用意至善．丁此时艰，决无可非议处．但鄙意尚略有补充，敢为先生一陈之．

建国虽经纬万端，但要言之可分为治标治本．治标所赖应用科学是，治本所赖纯粹科学是（只限于科学）．治标宜迅赴时机，故此次之留英留美之偏重应用，可谓窥中款要．治本宜效七年之病求三年之艾之道而早为之备，即在此抗战中应先为纯粹科学树一基础，不宜过于偏枯．右说似太抽象，今作次之具体建议，即在国内与研究纯粹科学之学员以进修及升迁之机会．进言之，对于进修方面，宜设置纯粹科学之研究所．升迁方面，则大学（或其他学术机关）使用人员时应特重视其研究工作．以上两端虽似浅显，鄙之无甚高论，但窃念此将大有助于廿年后之中国科学前途．

先生鞅掌教育，纳善如流，故敢贸然略贡刍檇，以备采纳（又闻中研院不日开会，如先生能及时一呼，其功效当胜于我辈纯粹科学者之埋首十载也）．

专此敬请

钧安

后学　华罗庚敬上

三月四日

（寄自西南联大算学系）

此信言简意赅，无隐诲之处，我们只就他写信的背景和相关的几件事作些说明，发点联想．

（i）华罗庚此时给政府教育当局的最高领导直接写信，除其个人在学术组织方面的抱负外，跟他当时在国内学术界的地位的上升有关．众所周知，华罗庚主要靠自学成才，并无大学学历，

他在数学上的才能的充分显露也经历了一个过程. 1931 年他进清华有个直接的原因，即他的那篇《苏家驹之代数的五次方程式解法不能成立理由》(1930 年)，文中他指出苏家驹算错了一个 12 阶行列式，这当然谈不上是天才之作. 熊庆来教授请他到清华，恐怕主要是这位地处僻壤的自学青年执著钻研数学的精神感动了他，爱才惜才育才之心，促成他把华罗庚招来清华算学系当一名助理员. "管管图书、公文、打字，也兼办杂事，如通知教员开会."[1]教授们开始想到的是让他学学诸如解析几何这样初等的课程.

靠着惊人的勤奋，华罗庚充分利用清华优良的学习环境，很快显示出了真正的实力. 据段学复先生回忆，华罗庚曾和王竹溪、许宝騄和柯召等清华大学的本科生一起听课，他们之间往往在暗地里悄悄地进行着"做题竞赛."[4]1933 年他被破例提升为助教，两年后又升任教员，无学历而在清华站住了脚. 对华罗庚而言，1936 年 J·阿达玛 (Hadamard) 和 N·维纳 (Wiener) 来清华讲学给他带来了研究工作上的转机；这两位学界泰斗捎来了国际上数学研究前沿的信息，使华罗庚开始迈入主流数学的领域，促成了他去英国留学. 1936—1938 年间，华罗庚在英国剑桥大学致力于正热门的解析数论的探索，特别是圆法和三角和估计的研究. 他的成果实际上已使他跻身于世界一流数学家的行列[1]. 1938 年华罗庚自英返国时，不少大学争聘他为教授之举，说明他的才华此时已为国内学界所认可.

华罗庚并不满足于在数论一个方向上的成就，回国后除继续整理数论成果，撰写堆垒素数论著作外，在研究上立即转向了一个全新的方向——近世代数 (即 30 年兴起的抽象代数). 据西南联大注册组织档案记载，华罗庚在 1938—1939 学年为三、四年级学生讲授近世代数课 (选用教材主要依据 van der Waerden 的 Modern algebra，段学复为其助教) 同时，华罗庚还主持一个有限群论讨论班. 不久，他和段学复就在有限 P 群方面获得了出色的成果[4]. 我们可以想象，华罗庚这时在学术研究上可谓踌

踌满志；进而来施展他的另一抱负——涉足学术组织领导，似乎颇合时机.

(2) 本世纪 40 年代初，华罗庚虽在学界同仁中已富盛名，但在政府部门中的名声却不大，甚至教育行政部门的办事人员还有不知其大名者. 他的这封信在教育部收文登记册上有记载，开始把“华罗庚”登记为“华萝庚”. 追其缘由，若以当时通用的繁体字论，“萝”与“羅”相差甚远，不至抄错；再一看华罗庚信中的亲笔落款，原来恰用的是简体“罗”字，致使那位不知罗庚之秘书犯此错讹. 我们似可推测，这封信是他跟政府上层人物最初接触时期的函件. 陈立夫对此信的批示是“吴司长核后拟复”，但我们未查到复信底稿.

(3) 当时庚款留英政策确有变动. 据 1939 年考取庚款留英的段学复先生回忆，跟他同届考取英庚款去加拿大多伦多大学留学者，以应用学科者居多：纯数学 2 人（段学复、曹蕯），应用数学 3 人（郭永怀，钱伟长，林家翘），地球物理 2 人（张龙祥、傅成义）. 足见华罗庚对科学政策变革之敏感. 他的治标治本之论，虽仁者见仁智者见智，但他的具体建议可能起过历史作用.

华罗庚关于设纯粹科学之研究所的主张，似主要针对当时的中央研究院（以下简称中研院）未设数学研究所而言. 因天文、物理、化学、地质、动物、植物、气象各科早有研究所于中研究院内[5]. 中研院 1927 年筹备期间曾计划设数学研究所，这跟当时任院长蔡元培视数学为纯粹科学之基础的观点相合*. 但 1928 年正式建院时取消了这一计划，其后又长期无人问津，其缘由耐人寻味**. 华罗庚在信中呼吁陈立夫施加影响于中研院，是否真

---

* 蔡元培在主持北京大学期间曾主张：“大学宗旨，凡治哲学、文学、应用科学者，都要从纯粹科学入手，治纯粹科学者，都要从数学入手，所以各系秩序，列数学系为第一系.”[6]

** 华罗庚在解放后对此有过评论：“数学是科学之母，它的发展可以刺激其他科学底发展. 换言之，它是有带头作用的科学. 国民党政府迟迟地成立数学研究机构，是不了解科学底本质的！”[7]

起了一点推动作用，尚无直接的资料印证．据查，1940 年 3 月 5 日蔡元培在香港逝世．中研院评议会 3 月 22 日在重庆举行第五次年会，提名新院长后选人及选举中研院第二届聘任评议员（姜立夫继续当选为评议员．自 1928 年建院起，他一直是评议会中唯一的数学方面的代表．后朱家骅出任院长）至 1941 年 3 月，评议会决定“以数学为科学基本学科，增设数学研究所筹备处于昆明”．筹备处的第一批兼职研究员（此时尚无专职者）为苏步青、陈建功、江泽涵、陈省身、华罗庚和姜立夫[5]．“以数学为科学基本学科”作理由增设数学所，似言不由衷，个中原因无从查证．我们从华罗庚的呼吁中判断他本人对办数学所已有考虑是不会错的．

(4)“先生鞅掌教育，……其功效当胜于我辈纯粹科学者之埋首十载也”一语，恐是华罗庚对当时官办科学之弊端有深切了解的肺腑之言．在其后的学术生涯中，他一直相当注意跟政界上层的联络．

2 “率尔前往可能牺牲独立发明之令誉”

华罗庚于 1944 年 1 月 15 日和 3 月 7 日接连有两函致仍是教育部长的陈立夫．我们先看 1 月 15 日的信：

立夫部长先生赐鉴：

敬启者：在渝承光荣招待，感铭心腑．临行适值政躬违和，致未能面聆教言，深引为憾．罗庚承大部补助之出国旅费美金千元已达昆明中央银行，不日或能领到．但罗庚为种种关系寒假不能成行，此款是否应先行奉还？大部抑如何办理，敬恳指示俾使导循．今为种种关系一语，作次之详释：

一、护照尚未办妥，预计取得护照，请准外汇，非数月不行．

二、家庭安置困难．六口之家寄寓昆明，此次在渝已备受物价骤升之苦．盖物价变更太速，舍间负责无人为可虑耳．

三、此次在渝，蒙俞署长大维，谭次长伯羽，以一应用问题

久未解决者垂问．罗庚运其愚钝竟获解决．于抗战已入决定阶段之今日，一纯粹学人发现对国防竟能有具体之贡献，其快可知也！因作“守株待兔”之想，期能无负于国恩耳．

四、就研究方面言，罗庚与前哥廷根大学教授 Siegel 氏曾各独立发展“数阵之自形函数论”，而罗庚之理论实较其更为博广与精到（已得其本人及 Weyl 二氏之谬许），现已在刊布中者有三文，共百五十页左右（数学文章不易写长，常在十页左右，此乃先生所素知也）．又有三文已有成稿，约二百页左右，且余意无穷，诚如 Weyl 教授所谓罗庚已获一重要结果之矿，可以经久不竭也．现 Siegel 氏在普林斯顿高研所．若罗庚前往，当深获切磋砥磨之益．但其在学术界之资望，为年龄履历等关系而在罗庚之上，若率尔前往（接受高研所之邀请），可能牺牲独立发明之令誉，而变为 Siegel 学派之可能，是以不得不先定基础再行出国也（如能不受高研所之邀而前往当更好）．且此论如能见重于世界，则示我国抗战期中之一佳话也．惟刻下研究进行甚感困苦，盖乏助手也．若大部能开一特例补助一二个（或二、三人）专随罗庚作研究，使其能帮同整理拙著而早日完成，然后罗庚携此出国，使国际间知我国于艰苦抗战中犹能获如此之成绩，或可一新观听，此或亦国际宣传之一道也．此种请求，见及即言，实属不情之至．若于理有所不可，敬恕一笑置之．

尚有鄙见两端，当于次函奉陈．

专此敬请

勋安

华罗庚敬上

一月十五日

对此信笔者感想如下：

（1）此时华罗庚的名气较之 1940 年写那封信时又大了许多．一个原因是他在 1941 年获得了一项大奖．民国政府为了评比和奖励优秀的学术著作、科技发明及艺术创作，行政院于 1940 年 3 月公布了“设立学术审议委员会”的决定，同年 4 月产生了第

一届学术审议委员会，5月即通过了“补助学术研究及奖励著作发明案”，规定每年评比一次．每一届评奖活动竞争激烈但不失公正．1941年评选揭晓，一等奖仅两项：冯友兰的《新理学》和华罗庚的《堆垒素数论》*，这表明在社会上公开确立了他的学术地位．

（2）华罗庚此时已在复函数的研究领域取得重大成果，他独立于西格尔（Siegel）创立了利用矩阵几何研究典型域的方向[1]．这是一场国际间的学术竞赛．华罗庚在这场较量中表现了颇强的竞争心理和爱国心．出国川资已有，家庭之累恐非不能妥善安排，唯“发明之令誉”“变为Siegel学派之可能”在他是不能接受的．

（3）华罗庚请求特别研究补助，过去鲜为人知．从民国教育部档案知，高教司于1944年2月2日向陈立夫汇报华罗庚的函件内容及所拟处理意见中称：“华教授研究成绩卓著已为国际学术界所推许；且方届壮年勤于研究，实有国内最有希望而不可多得之人才．……惟以家累甚重助理乏人，故研究工作尚未充分开展．似可每年由部补助其研究费及助理人员津贴叁万元至伍万元．如此其著述当能作进一步之整理，在国际学术界更可为我国争得相当荣誉．”[9]陈立夫同日批复：“补助叁万元”．究此“叁万元”的实际价值，我们查到一则旁证：“到33年（指1944年），每月伙食涨到1000多元”[10]，故大致够供三个人一年的伙食，对拮据中的华罗庚倒也不失为雪中送炭．

（4）信中所称解决了一个国防部门久未解决的应用问题（可能与密码有关！）．想来华罗庚在40年代已尝到用数学解决实际问题的乐趣，对他数学观的形成有积极的影响．

3　“坐谈几无一不知，实算则茫无一策，……浮夸之风焉”

华罗庚在接到教育部对他1月15日信的回复后，自然心境

---

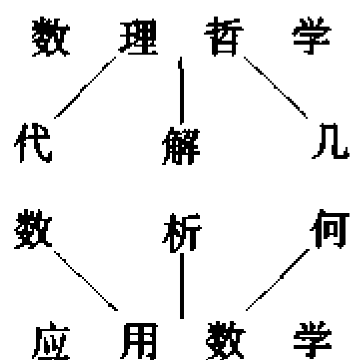
* 此届获奖的数学家共两位，另一位许宝騄因数理统计论文获二等奖[8]．

舒畅. 他在 3 月 7 日给陈立夫回了一封长信:

立夫部长先生赐鉴:

顷接尊教，感不尽言. 拙劣之文字，实无以表鄙衷之钦仰也！所允赐三万元，不特使罗庚之工作得加速进行，抑且可以提高此间数学研究之风尚. 盖罗庚拟将此款“一文作二文”用，以之补助研究有成绩且助罗庚工作者. 今可奉闻者，即绝响半年之讨论班即将活跃矣. 以后受此惠而作成之论文，当陆续奉闻. 清账容于半年内报销.

关于罗庚出国计划，今亦拟就便一陈. 此次出国之目的，一方面固为广数学方面之见闻，而他方面实为理论及实用谋一联系也. 盖就国防观点以言，数值计算、机器计算实为现代立国不可或缺之一项学问（见附录一），而我国现尚无认识之因而研究之者. 而我大学之数学课程内容，大致仍抽象而忽具体；数值计算往往为不了解者以“容易”二字抹煞之. 因之，毕业之学生，坐谈几无一不知，实算则茫无一策. 以之谋建国则不啻风马牛，以之言学术则将流为浮夸之风焉. 鄙见认为数学宜横贯纵通如次图:



而不能有所偏倚. 关于数学研究所应包括之项目，应如附录二. 深信若能有一研究机关准此进行，则言学术可成辅车之势，对国防定无脱节之虞. 然犹未敢贸然自信，因之，期能出国一考，察友邦科学家（数学家）如何报国之道，及以何种学识贡献给国家.

此次计划中关于经济之打算，舍钧部及美国高研所补助者外，当然以清华休假为主要来源，但今清华改制矣．故不得不暂行搁浅，奢望他日能于钧部教授休假办法中得以成行．但自问识陋资浅，恐无以当选耳．

最后再表谢忱．今后当益自奋勉，祈不负钧座为国培贤之至意也．

专此敬请

导安

晚　华罗庚再拜

3月7日

附录一　机器计算及数值计算之重要

国外情况：敌人海军部中有此项设计并曾算出一正弦积分表，在英国不列颠学会之表未出版前，此保持世界纪录．

英国 British Association 董其事有数学实验室（Mathematical laboratory）之设．W. G. Bickley，S. C. P. Miller，A. J. Thompson 等负责其事．

美国 Bush 教授之领导已与国防打成一片．如 Lehmer 辈更将此导入学术之研究，以补人力不可能之缺憾．

德国于普通大学中即有调和分析器之设置．Runge 教授移身致力于简算捷算之工作．

有关科目：以下诸科皆需其辅助——弹道，投弹，测向（指飞机来向而言）统计，气象，化学中之结晶学，物理学中之一部分．总之，对实用固有贡献，对理论亦不少相助处也．

机器种类：

National Accounting Machine（英国制），

Bush integrater，

Mallock eguation-solver，

Hollerith machine，

Punch Machine（专为统计而设），

Sinima integraph,

Harmonic analyser,

Differential analyser.

较简之算机不预焉，为特别对象而设之算机亦不预焉．且颇多事关国防，无法在此得其消息．

附录二　数学研究之项目

- 纯粹数学之部
  - 数理逻辑
  - 解析学
  - 代数学
  - 几何学
- 应用数学之部
  - 弹道学
  - 统计学
  - 测量学
  - 数理经济及数理遗传学
  - 空气动力学
  - 弹性力学
  - 理论物理及化学
- 计算之部
  - 算机之运用，经常襄助国防计算重要表格
  - 制造算尺算机以备统计等方面之用

若有如此规模之数学研究机关，庶可以达到联络运用之妙．

此信所陈述之见解明白无疑．笔者只发如下之感想：

(1) 我在写有关中国科学院数学研究所成立经过的文章[2]时，对华罗庚办数学所的通盘计划甚感惊诧．一位纯粹数学之高手，竟如此重视应用数学和计算机的作用，实属难得．当时细细一想倒也不觉奇怪了：华罗庚参与建所时刚从美国返回，二战期间美国应用数学的大发展，二战结束前电子计算机的问世及其后发挥的巨大威力，一定给他留下深刻印象；作为新中国数学界的一位领头人物，当然不会忽视这些有生命力的行当．后经王元教

授指点，知华罗庚在1946年发表的“访苏三月记”中，已初露其如何办数学研究所的端倪．如该文中写道：“我联想起我国将来数学研究所的工作，似乎不应当只偏重于纯粹数学或纯粹数学的一部分而已．”[11]又如“我想对我们中国科学界的情形，中国有一般人，认为数学无用，也有一些数学家，自己对数学研究得很好，但总觉得数学无用武之地．其实，是因为没有中间的这一道桥梁，把数学和应用连接起来．我几年前，就曾呼吁过，我们中国科学界要想进步，除去必须注意到理论的研究之外，还需要注意到理论和应用的配合．理论如果不和应用配合，则两相脱节，而欲求科学发达，实在是不可能的．我从莫斯科大学的应用数学系的参观中，益觉我以前的主张是不错的．”[12]此段文字中“我几年前，我就曾呼吁过”一语原未找到依据，一见1944年3月7日函便一目了然了．华罗庚心中早已有了一个在中国大展数学宏图的愿望了．

(2) 该信附录一论及“机器计算及数值计算的重要”，历数世界这一方向的研究动态，这在当时的中国数学界是少有的．他特别指出它们“对实用固有贡献，对理论亦不少相助处．”在信的正文中又说：“数值计算、机器计算实为现代立国不可或缺之一项学问”．这已为近几十年社会发展的历史所证实．联想此信出自1944年初，冯诺伊曼（von Neumann）型程序内储式电子计算机尚未正式问世，其威力尚未被一般人所充分认识，他的看法确实令人刮目*．我想，华罗庚对数学整体性的认识以及对数学有用处的信念可能是他作出上述判断的理由．又联想起50年代及其后多次批判他理论脱离实际，实与他的看法与做法相悖．

(3) 华罗庚视数学为一有机整体的看法，以信中正文处的那张略图和附录二为其轮廓．他的这一种看法经1946年访苏得到了加强，本世纪50年代初在筹建中国科学院数学研究所时又真

---

* 编者注．1946年，华罗庚去美国后，花不少精力了解应用数学，特别向Von Neumann请教．早在1952年数学所成立时，就没有电子计算机研究组．

刀实枪地进行了实践．到 1954 年，他在“关于展开数学研究工作的意见”[3]中系统地阐释了他的数学观和在中国发展数学事业的具体道路．那是一篇颇精彩的文章，不乏时代气息；其中对数学中各分支如何构成有机的整体，对数学中许多分支的形成、作用及相互关系都有明确的说法．

以上对华罗庚早年所写三封信的披露与粗浅议论，从一个侧面反映了他的数学观发展的脉络，以及他为发展我国数学事业所作的早期努力．我们也可从中窥见华罗庚的某些个性．

参 考 文 献

[1] 王元，华罗庚，见：世界著名科学家传记．数学家 I．北京：科学出版社，1990，63—94．

[2] 袁向东．功崇惟志，业广惟勤——记中国科学院数学研究所的成立．数学的实践与认识，1992，(4)，75—79．

[3] 华罗庚．关于展开数学研究工作的意见．科学通报，1954，(10 月号)，51—55．

[4] 丁石孙，袁向东，张祖贵．“几度沧桑两鬓斑，桃李天下慰心田”——段学复教授访谈录．数学的实践与认识，1994，(4)，57—74．

[5] 见：国立中央研究院概况．1948．

[6] 蔡元培．北大授与班乐卫等名誉学位礼开会词（1920 年 8 月 31 日）．北京大学日刊，第 678 号，1920 年 9 月 4 日出版．

[7] 华罗庚．苏联数学家对数学上著名问题的贡献．科学通报，1950，1 (2)，69—72．

[8] 参见：历届获奖作品及作者题名录．存中国第二历史档案馆，全宗五，1356 卷．

[9] 参见：民国三十三年二月二日高教司致教育部长及次长函．存中国第二历史档案馆，全宗五，2548 卷．

[10] 北京大学校史（1898—1949）．北京大学出版社，1988，增订本，344．

[11] 华罗庚．记苏三月记．时与文，1947，14—17，见：华罗庚诗文选．中国文史出版社，1986，67．

[12] 华罗庚诗文选．北京：中国文史出版社，1986，61．

附　录　XIV

访苏三月记

华罗庚*

1946年2月初，苏联科学院及苏联对外文化协会，邀我作访苏之行，我就在2月7日，从昆明乘机飞重庆，办理出国手续，19日办妥护照，22日返昆明，告别妻子儿女及在昆友好，25日离祖国飞抵印度的加尔各答，住在中国大厦.

到加城后，一方面办理乘机优先证，同时略治行装．从昆明到加尔各答时，仅衣破棉袍一件，由于多年生活在艰苦的抗战时期中，以至衣衫褴褛，不能登大雅之堂了．乘机优先证的请得，亦极费事，故逗留在加城十余日，尚不能成行，心中颇焦急.

3月7日，是日说有飞机，可去巴士拉（Basra)，不幸忽然临时取消，仍未能登程，午后，参观加尔各答大学，他们请我讲演，我因行色匆匆婉辞了．6点半，印度算学家皮拉（Pillai）先生来访，长谈达8小时才离去．皮拉先生是我工作的爱好者，在他的一篇文章中，开头就说："华的定理，在本文中，演着最主要的角色"(Play the most important role).

8日晨5点15分，到大东旅馆，搭乘一架水上飞机，由加城起飞，机内备有早餐，极为丰富，有煎鱼、夹鸡面包、夹火腿面包、香蕉桔子．咖啡则任客取饮．同机有印度人数位，向我恭贺说："你们国内现在国共合作了，国家可以走上和平合作的道路，不像我们的国家，内部一点都不团结．"言下，他们似乎都羡慕我是个中国人.

* 见"时与文"，14—17，1947.

然而正因为我是个中国人，对本国的内情，知道得比他们清楚，真的，我们这个中国能够从此和平康乐，天下太平了吗？我当时思潮起伏，百感交集，忧从心上来，耳边轧轧机声不住地吵扰，忍不住随即呕吐起来．这是我生平第一次在交通工具中，发生晕机的现象，同时也辜负了这餐丰盛的早点．下午飞抵卡拉奇．

9日下午4时，飞抵巴士拉，住沙特阿拉伯旅馆，这旅馆设备极为完善美观．

10日晨六点半，自巴士拉乘一小型飞机起飞，这飞机是为我一人的专机，虽是在航程中无旅伴可以谈天，但航行极快，亦觉愉快．上午9时，抵巴格达，下机后，知道我去苏联的飞机票，已代我购就．满以为明天当可继续飞行，孰知天气不佳，不能起飞．滞留于巴格达者二日，天气仍未好转．不得已，于14日改坐汽车，车行80英里，中途遇河水大涨，不能过，又折回，时心中焦躁难耐，乃吟诗四句曰：

我欲高飞云满天，我欲远走水溢川．
茫然四顾拔剑起，霜华直指霄汉间．

15日晨仍坐汽车，10时冲水而过，午后6时，经克尔曼沙阿（Kermanshahan），这时已夕阳衔山，饱赏了伊朗的有名山水．看！有些山峰苍翠欲滴，有些山峰如城堡矗立，有些山峰以雪作帽，屈指计算，今夜有月，想来月夜在雪山上行走，当别具风味．9时左右，行抵雪山，两旁雪如壁立，车行雪衖中，行道已冰冻得高低不平，汽车不时给坚冰所阻，不能顺利进行，而风声如石破天惊，寒彻骨髓，孰知“月夜雪山”，竟非雅事，当时偶尔联想到柳诗中“孤舟蓑笠翁，独钓寒江雪”句，这意境，一般优闲的雅人，坐在温暖的书斋中，手捧着热茶，嘴衔着雪茄，摇头摆尾，啧啧称赏，认此情境，高雅至极，其实他们如何能够体味到蓑笠翁寒江独钓的心情？因之，我深深觉得要了解某种环境，唯一的道路是自己参加在内，不然所得到的仅仅是空虚的幻境．

16日晨9时出发，仍于雪衖中续行，羁迟至午后3时，才出雪衖，兼程而行，抵德黑兰，时为午夜10时半了，德黑兰当时正在戒严，每到夜间11时，即不能通行，我则早达半小时，可谓幸矣.

在德黑兰停留了两天，19日乘机飞苏.

经22天的旅程，苏联总算在望了，以后就是我访苏的记述.

3月19日

今晨8时半起飞，在巴库降落．巴库是苏联最大的油区．就在这里，办理入境手续，检查护照和入境证．检查人员看了苏联驻华大使馆的证明书，只略略翻了翻就通过了.

下午飞抵斯大林格勒飞机场，大雪，路阻，不能入城．苏联境内，外国钱币是不能使用的，故我在德黑兰苏联旅行社买了餐券和旅馆券，但此券在飞机场用不上，无奈，我只得准备早一点睡觉，挨一夜饿了．未几，飞机场场长来访，他不会英语，会几句德语，我也会说几句德语，可是他说的我不懂，我说的他也不懂，大家只得交换着默默的感情．过一会，他走了，我打算上床睡了，场长派人送来一餐晚饭，备极丰盛，我打算送他五个美金作餐资，侍者说，这晚饭是飞机场里招待的，不要花钱，我只得心领这番盛意了.

3月20日

晨7点40分起飞，12点抵莫斯科机场．对外文化协会远东司司长列文生先生（Livinson）及翻译司长康特洛索夫（Kontroshoff）先生在机场接我．此地距莫斯科市区，尚有35公里，我们坐汽车在大雪中进城，一路上经过大的森林，宽阔的道路．莫斯科的公民，冒着大雪，在将街道上的厚雪铲去．我看到他们那种不怕风雪，忍受寒冷的工作精神，使我想到苏联人民的英勇．我们又经过苏联科学院所在地的大街（街名 Bolskaya kaluzokaya）．在这条街上，大多是科学院及其所属科学研究所的建筑，那一幢幢巍峨的大厦引起了我无限的感想，我们中国的科学家，哪天亦能在我们自己国家的伟大的科学院内，安心地埋头做

着我们的研究呢？

车到莫斯科市区．我们先到餐厅里吃饭，列文生先生对我说：

“你这一路太辛苦了，一路上观感怎样？”

我说：“一路上都是热哄哄的地方，只有这里是个清凉的世界．”

列文生先生说：“希望我们之间的感情，不要这样清凉！”

于是大家端了满满的伏特加干了两杯．伏特加的猛烈，是早已闻名的，两杯落肚，才实地尝到了它猛烈的滋味．

餐后，他们送我到国家旅社住定了房间，我即打电话给中国大使馆．晚，朱庆永兄来访，并伴我去大使馆，带给他们在中国代他们带来的东西．

记得1936年，我去英国的时候，曾经在莫斯科逗留了四个钟点，那时是夏天，这次莫斯科是下着大雪的季节，除了气候上给这城市的改变以外，在我的回忆中，其它便没有什么两样，丝毫不觉得有刚经过战争后的紊乱．希特勒在欧洲横扫了14个国家，乘势以百万大军进迫莫斯科，而苏俄人民，英勇卫国，卒至打退希特勒军队，而莫斯科屹立未动，风貌依然．这个钢铁般的城市，不仅为苏联抗战的基地，亦为苏联人民精神上的台柱，我想到这里，不禁对这伟大的城市，作无限的敬仰．

3月21日

朱庆永兄是我在清华时的老朋友，三年前，他从重庆去莫斯科的时候，我也恰巧在重庆，当时我曾对他说，一二年后希望我们在苏联见面，这是三年前的戏语，不想竟成为事实．今天一上午，便和庆永兄聊天过去了．

下午3时，列文生和康特洛索夫两先生陪我游莫斯科的市郊，先踏着深厚的雪，登郊外一小山，纵览莫斯科全境．列、康二先生指点给我看，哪些地方是从前拿破仑军队迫临莫斯科的时候，莫斯科的人民纵火焚烧的．当时我想到拿破仑不可一世的雄风，在莫斯科附近吃了这么一个大败仗，从皇帝的宝座直跌下

来，从此一蹶不振，对照了这次希特勒的侵略而卒至灭亡，历史虽然不走回头路，但古今侵略者之如出一辙，倒是令人深可玩味的.

下了莫斯科小山，就到市区参观各个机关. 4时，到VOKS（对外文协会的简称）拜访会长凯缅诺夫（Kemenoff）先生，他备了一个欢迎我的茶会，凯缅诺夫先生问我会不会俄语，我答不会，他立即给我介绍了一位翻译包罗宁先生. 他又问我对苏联的哪些问题有兴趣？我说，除了数学外，很想了解苏联的科学研究及高等教育的情形，他答应给我准备关于这两方面的材料和参观的机会.

6时，去算学研究所，适维诺格拉陀夫先生去科学休息所，未晤，晤见了其他十位数学家：

庞特拉雅琴先生（Pontryagin）

开尔陀希先生（M. V. Keldosh）

息垓先生（B. L. Segal）

狄龙奈先生（B. H. Delone）

尼柯尔斯基先生（S. M. Nikolsky）

马尔尚尼希维希奇先生（K. K. Marzhanishvishch）

倍尔芒先生（A. F. Bermant）

勾尔方特先生（A. O. Gelfond）

刘斯透尔尼克先生（L. A. Liusternik）

息独夫先生（L. I. Sedoff）

这十位先生，都是神交已久，并且有几位是曾经通信好久的朋友，一旦把晤，奋忭异常.

息垓先生首先对我说，我的堆垒素数论（Additive Prime Number Theory），他在苏德战争之前，就着手翻译为俄文了. 因为战争爆发，他就因参加战时工作而停止了. 战争结束后，才由另一位先生完成了这翻译的工作. 他说，这本书，不久可以在苏联科学院出版.

在他说完时，庞特拉雅琴先生进来了，我们立刻成为很熟的

朋友．庞先生的著作连续群论已译成英文，我在联大曾经讲授过他的著作，所以，这一次一遇见，就谈得很投机．庞氏双目失明，却系世界上屈指可数的连续群论专家．倍尔芒先生是苏联数学杂志数学年报的编辑，这时插进来说："我们这里所有的中国算学杂志，都是多年以前的了，为什么这么久，中国都不寄来了呢?"他接着说："联络，联络，赶快联络，我们在1939年接到一本数学杂志以后，就没有接到了．"

接着狄龙奈先生和我谈到数学竞赛会的事情．竞赛会每年举行一次，现在已经是第九次了，我这趟去，正好赶上．下面是一张竞赛会的日程：

2月27日 讲演

（一）讲员 教育科学研究院通讯研究员

马尔库息维奇教授（A. I. Markushevich）

讲题 级数

听讲者 第七第八级学生

（二）讲员 斯大林奖金获得者刘斯透尔尼克教授

讲题 多角形及多面体

听讲者 第九第十级学生

3月24日 讲演

（一）讲员 斯大林奖金获得者（科学院研究员）*

柯尔慕哥罗夫（A. N. Kolmogoroff）

讲题 对称性

听讲者 第七第八级学生

（二）讲员 斯大林奖金获得者（科学院通讯研究员）**

阿历山大罗夫（P. S. Alexandroff）

讲题 复虚数

听讲者 第九第十级学生

3月31日 讲演

* 编者注．应为院士与通讯院士．

** 编者注．应为院士与通讯院士．

(一) 讲员　雅诺夫斯基教授 (Prof. S. A. Yanovsky)

讲题　算术与代数

听讲者　第七第八级学生

(二) 讲员　杜勃诺夫教授 (Prof. Y. S. Dubnoff)

讲题　长度　面积　体积

听讲者　第九第十级学生

4 月 7 日

第一次竞赛

4 月 14 日

第一次竞赛的结果与问题解答

4 月 21 日

第二次竞赛

4 月 28 日

竞赛会给奖式及莫斯科大学力学数学系教授和优秀学生招待会

在这里，我附带地说明一下苏联的教育制度，小学五年，中学五年，所以上面所说第七第八级学生，是指的中学二三年级学生，其年龄大概是十三四岁的光景，第九第十级学生是指的中学四五年级学生，其年龄大概为十五六岁，五年级即为中学的最后一班.

狄龙奈先生提出了上次考试的一个问题，好些教授都给难倒了.

这次竞赛会参加的学生，莫斯科和列宁格勒区各有三千多人参加，每千人中，大约录取 60 名，都是最优秀者.

3 月 22 日

上午参观莫斯科大学.

在我未去参观之前，我主观上总以为莫大一定是党化教育最强烈的大学了，当我一进巍峨的大门，第一眼看见的就是一座列宁像，他手上捧着的却是一本书！先到图书馆参观，四壁挂的是相片，我想这些相片总是党国要人了，走近一看，原来都是科学家、文学家和艺术家，科学家有苏联大数学家维诺格拉陀夫和卡

比萨（Kapitza，苏联的大物理学家，一个原子研究的主持者）、文学家托尔斯泰等，至此，把我主观的想法完全打破.

图书馆参观毕，去数学系参观，恰巧狄龙奈先生在上课，我就去参观上课的情形. 教室很大，听讲学生有 400 余人，讲的是罗仑兹变换式（Lorentz Transform），可惜我不懂他的语言，否则，倒可以叙述一下他的讲授法了. 但我看到他解释了好久，才写下一个式子来，一个钟点之后，狄先生下了课，陪我参观应用数学系（或称力学系 Department of Mechanics），这个系包括空气动力学、液体力学、弹性力学、材料强弱等研究. 因为时间的限制，我只又参观了一个材料强弱试验室，是研究材料的压缩、拉长、碰撞、扭转、坚度等性质的.

参观以后，我想到我们中国科学界的情形，中国有一般人，认为数学无用，也有一些数学家，自己对数学研究得很好，但总觉得数学无用武之地，其实，是因为没有中间的这一道桥梁，把数学和应用连接起来. 我几年前，就曾呼吁过，我们中国科学要想进步，除去必须注意到理论的研究之外，还需要注意到理论和应用的配合，理论如果不和应用配合，则两相脱节，而欲求科学发达，实在是不可能的. 我从莫斯科大学的应用数学系的参观中，益觉我以前的主张是不错的.

晚去莫斯科大戏院看歌剧，戏院中工作人员共 3000 多人，主角鲁宾曲夫（V. L. Lubentsoff）是俄罗斯国家演员. 歌剧名苏丹皇的故事（A Story of Tsar Sultan），是四场七幕剧，内容虽不懂，但其歌舞之优美，布景之富丽堂皇，已是使我欣赏不已了.

3 月 23 日

参观列宁图书馆，有九个阅览室，1200 个座位，每天有 3000 个阅览者，书架长达 2400 公里，藏书有一千万册. 我非常欣赏其中有一位意大利的名雕刻家康诺伐（Conova）氏的雕刻，徘徊不忍去. 过了几天，馆中代我摄下了这个雕刻的相片送我，为之感谢不止.

同时我看到一份最新的数学基础杂志（Foundamental Mathematics），惊悉纳粹侵入波兰时，好些数学家都遭受了杀害，其中有为我所熟知的大家．录其名及遇害之年于后，敬志哀悼：

S. Kaezmarz	1939	A. kozniewski	1939
S. Kempirty	1940		
A. Moboski	1940	（死于集中营）	
A. Raz haran	1940	（死于集中营）	
A. Lindenbaum	1941	死于特务之手	
A. Zomnicki	1941		
J. Pepis	1941	死于特务之手	
S. Ruziewicz	1941	死于特务之手	
W. Stozek	1941	死于特务之手	
W. Wilkosz	1941		
S. Saks	1942	死于特务之手	
H. Anerbach	1943	死于特务之手	
J. P. Schauder	1943	死于特务之手	
J. Zakwasser	1943		
S. Banach	1945		
J. Mazmekiewisz			

我想国人一定很想知道苏联是否重视别国的科学．我在列宁图书馆中所看到的美国科学方面的杂志，比在印度时所见到的还要新．我在美国发表的一篇文章，就在那里首先看到的，及至回国以后，尚未得到这篇文章发表出来的消息．

晚去莫斯科大戏院，看普希金的名著：奥涅金（我国有吕荧先生的译本），几个主要的演员都是斯大林奖金的获得者，如苏联国家演员柯兹罗夫斯基（L. S. Kozlovsky）、俄罗斯优秀演员克鲁格里柯伐（E. D. Kruglikova）、苏联国家演员米哈依罗夫（M. D. Mikhailoff）．表演艺术之佳妙，叹为观止．

3月24日

这天是礼拜天，按照上面所说的数学竞赛会的日程，今天是

柯尔慕哥罗夫及阿历山大罗夫两先生演讲对称性及复虚数的日子，所以我特别去参观，演讲的地方是莫斯科大学.

柯氏是科学院研究员，专门研究几率论. 在战争中著有弹道学与几率论关系的书. 阿氏是科学院通讯研究员，形势几何学的泰斗，我国名学者江泽涵先生，就是阿氏在美国普林斯顿大学执教时的学生. 他是莫斯科数学会的会长. 两氏均为苏联著名的数学家，在数学界方面有其崇高的地位，然而，他们却抽暇给十五六岁的中学生作讲演，他们那种诲人不倦，传播数学给一般人民的精神，是异常使人感动的.

听讲者，除教室中坐满了人之外，窗台上也挤满了人，其间有不少白发苍苍的老头子，我曾问了怎么听讲的人之中会有老头子，得到的回答是：这些老头子都是些中学教员，他们是专诚来听这些名学者的演讲而求进步的.

下午朱庆永来访，和他谈到上午柯、阿两氏讲学的精神，和一般人民求进步的勇气，实足是为我国之榜样.

晚去莫斯科大戏院看舞剧，完全以跳舞的动作来描述故事的进程，除去音乐伴奏以外，没有歌词，所以我这个不懂俄语的外行也完全了解和欣赏. 女主角是斯大林奖金之获得者.

3月25日

晚，列文生先生邀我看电影，就在对外文化协会内，这是对外文化协会专门为我放映的，所以观众除了我之外，就只有列文生先生及我的翻译包鲁宁先生. 放映了两张片子，一张是“小红鬼”的故事，一张是名歌唱家莱孟旭夫（Lemanshoff）的成功传，“小红鬼”的故事是说明苏联的小孩子，战前在儿童之宫里的生活是怎样地快乐，战争时期，这些小天使的居住游息之处被希特勒军队毁去了，而这些小天使就参加了战时工作，即是苏联药草的采集，儿童们的工作，要占全部的四分之一哩.

莱孟旭夫原来是一个汽车夫，经过他自己的刻苦努力，终于成为苏联的名歌唱家，片中凡是莱氏的名歌，都包括在其中了. 我看了这张片子，就对列文生先生说：象这种好片子，是应当让

其它国家的人也有欣赏的机会的.

列文生先生对我说，如果我没有事，想看电影，文化协会有很多片子，可以专为我放映的.

3月26日

上午，取得许可证，列文生先生陪同我去参观克里姆林宫，看到历史上有名的大钟（此钟据说并未敲过，也未挂起来过），看到历史上有名的大炮，看到罗曼诺夫王朝的遗物，中有沙皇的御辇、衣服等. 克里姆林宫的建筑，全是用大理石及其它石头造成，和我国的皇宫大部用木料的不同. 宫殿都嵌着金子，气象堂皇宏伟.

因为下午应科学院及莫斯科大学之讲演，所以未能周详的参观，然而，仅此已足使人感触颇多了.

晚7时在莫斯科大学礼堂讲演，听众非常拥挤，历时一点多钟始毕，讲题为数阵几何学. 讲毕曾经有热烈的讨论. 讨论后，狄龙奈等教授又邀我至一小教室继续讨论了两个钟点.

庞特拉雅琴教授送我他的名著一本. 书上题了纪念的字句，很可珍贵. 同时，许多数学教授各自送给我他们自己的著作的复印本.

当时，我感觉到非常难为情，因为我在国内外所发表的文章，由于交通关系，都未收到过复印本，因而未能投桃报李. 此愿只有俟诸来日了.

3月27日

参观文化公园. 园中陈列有苏德战争及苏日战争中获得的战利品，如容克式飞机、老虎式坦克等，甚觉眼福不浅. 日本的坦克，列在德国坦克之旁，真如小巫之与大巫也.

因为大雪初霁，园中一切花木尚未开放. 园内有音乐厅、儿之家.

大使馆请吃晚饭.

3月28日

上午参观脱利脱雅柯夫美术馆. 此馆最初由人民自己所设立

的，后由国家收回管理．收藏的画，自七八世纪至近代的都有．

下午3时参加斯泰克诺夫研究所讨论会，最欣幸的，就是在会中晤见久已神交的维诺格拉陀夫先生，相互寒暄了几句之后，维氏邀我于明日去科学家休息所作竟日游．

讨论之后，我特别提出，此次所讨论的和我所研究的群论颇有关系．鹊法累维奇（I. R. Shafarevich）教授就向我索取此类著作，我说，我那些著作在国内久已发表了，只是因为未曾收到过复印本，所以国外见到的很少．他们都问我为什么中国不将这些有价值的著作寄到国外去？我无以置答．鹊氏即和我到住的旅馆中，读我的原稿《关于分类的个数的问题》．

这个问题，不妨在此地顺便说一下，因为这问题是和苏联的研究有关系的．这问题的第一特例，是美国一个数学家密勒（Miller）所解决的．更精密的结果，则为苏联数学家库拉柯夫（Kolakoff）所获得的．而我的，乃是全部都予以解决了．这篇论文发表于1940年的清华大学理科季刊．它是在上海印刷的，始终未得寄至国外，连我自己也未曾见过．

3月29日

上午去科学家休息所．所离莫斯科约30公里，位于森林之旁，据云，至夏天，风景尤佳．所内设备，比之城里大旅馆，也毫不逊色．在午餐时，毫无“配给”的情形，什么吃的都有．此餐历2时余始毕．

餐后，相与在室外作雪球戏．维氏现年55岁，精神抖擞，兴致也很好．他是斯泰克诺夫研究所的所长．他身上佩有两个勋章，一是斯大林勋章，一是劳动英雄章，不是在学术上有特殊贡献的人，是得不到这两种勋章的．据维氏说，全苏获劳动英雄章的共230人，中有15个科学家．维氏和另一数学家马斯海奇维里（Moshechvili）就是15个科学家中的两位数学家．

科学家休息所的旁边，有一座礼拜堂，中有一塔，据维氏说，相传拿破仑曾登此塔，了望莫斯科大火而狼狈撤退．

我们谈到数学．维氏对我的工作备极赞誉，我的堆垒素数

论，他们要付印. 这书的原稿上有中文，书名也是中文，我说倘使印刷不方便，中文字就不印上去吧！他说，他总极力设法保存原样. 我便题了如下的几个字：

"谨以此书祝中苏邦交永笃."

后来谈锋转到他所主持的斯泰克诺夫研究所的情形. 他说，这个研究所是研究纯粹数学及应用数学的地方，里面有 30 多个教授，在列宁格勒设有分所. 同时我联想起我国将来数学研究所的工作，似乎不应当只偏重于纯粹数学或纯粹数学的一部分而已.

之后，又谈到国家科学院的事情. 维氏说，其中数学研究员共七人，有：维氏自己、鲁森（Lusin）、培恩斯坦因（Bernstein）、柯利洛夫（Koriroff）、柯尔慕哥罗夫、沙波洛夫（Soboroff）及斯米罗夫（Smiroff）. 应用数学者二人，一为马诺海奇维里，一为海利斯蒂阿慕维奇（Heristiamovitch）.

最后谈到他的生活情形，他每月薪水二万二千卢布. 他约我后天去他家里玩. 临别时，他还一再叮咛，使我十分感动.

返城已晚 8 时.

3 月 30 日

在 28 日，我就将堆垒素数论的译稿拿回旅馆. 昨日晚开始校对，今天继续校对了几乎一整天. 初校完毕，送回数学研究所. 在校看译稿的时候，胡世杰先生来访，谢谢他当时将我埋头工作时的情景，摄入了他的镜头.

晚到红军歌剧院观军乐及舞蹈，还有三四百人的大合唱.

3 月 31 日

访维诺格拉陀夫于其家. 他家住在科学院宿舍中，一家有四间极其宽大的房子，仅他和他的姐姐居住. 他留我在他家吃饭，从午后一点半直到五点半才把一顿饭吃完.

席间，我发现维氏的常识异常丰富. 他知道重庆在什么地方，有多少人口，昆明在什么地方，有多少人口，长江、黄河有多长，喜马拉雅山有多么高，衡阳之役的情形怎样等等，比之有

些中国人还知道得多些.

他并交给我一篇匈牙利数学家的文章，要求我给它仔细的看看，其中有无错误.

6时半辞出，给我开汽车的汽车夫不见了. 原来我和我的翻译包罗宁先生进去的时候，说是半点多钟的工夫就出来的，谁知一进去就是大半天. 好在这里离我住的地方只有两条街，就和包罗宁先生步行返寓.

晚应武官处之宴会，遇一芬兰驻苏使馆的某小组，谈起芬兰名数学家纳房林拿（Nevanlinna）的故事. 他是芬兰的纳粹分子，现在芬兰解放了，他也失掉了教授的地位.

4月1日

整天未出门，阅匈牙利数学家之论文.

4月2日

上午做完那篇匈牙利数学家论文的节略，下午送回维氏去.

4月3日

由莫斯科去飞机场时，大雪纷飞，两旁电杆都被雪片飞舞得看不清楚. 在大雪中，飞去罗斯托夫，抵罗斯托夫机场时，大风吹得人站立不定. 等飞机加好了油，继续起飞，到阿特里斯(Adres)，预定是飞第比利斯的，因该处风更大，所以临时决定由阿特里斯飞苏虎米（Suhomi）. 苏虎米是黑海边一极美丽的城市，感谢这场大风，使我有机会来此观光一下.

在苏虎米住的旅馆，面对黑海，饱览黑海幽美之风光.

4月4日

由苏虎米起飞，上午10时半抵乔其亚（格鲁吉亚——编者注）共和国的首都第比利斯. 当地英陀里斯脱旅馆，早已为我和包罗宁先生准备了三间房间，其中有一间是临时将两间打通成一间的. 我们各住一间，将这大房间作为餐室和客厅之用.

英陀里斯脱旅馆位于罗斯泰凡里街. 面对着一所巍峨的建筑，是乔其亚共和国各部办公的所在，并对着富尼古乐山.

下午乔其亚对外文化协会会长米卡伐先生来访，大致排定以

后的参观和演讲的日程，其时乔其亚文翻译西西里雅女士也来了.

乔其亚房屋的建筑，特有风味，都是乔其亚穹形式的. 街道依山傍水，略如我国重庆，唯宽广则远过重庆耳.

4月5日

上午看画展，下午游富尼古乐山，全城风物，历历在目. 晚去影片工作室看电影，同看的有包罗宁先生、西西里雅女士、盖钩西哥利夫人（是乔其亚对外文化协会派来负责招待我的），以及影片导演等数人. 片名乔其亚苏维埃25年. 初到乔其亚，对它的一切知道得很少，观此片后，使我对乔其亚之历史、地理及其在25年中如何成长的各方面，都有了一个概括的认识.

4月6日

晨，盖钩西哥利夫人来说，她遇到乔其亚教育部长库伯拉齐（Kupradge）先生，他听说第比利斯来了一位数学家，渴望一晤. 这是一个意外的约会. 我就和盖夫人穿过街道造访. 库先生问知我姓华，接着就说是否为Loo-keng Hua，他既早知我的名字，所以我们的谈话进行得十分愉快. 他很诚恳地对我这次来到第比利斯表示极大的欢迎，并且邀我讲演，请我写一篇论文作为纪念. 后来，我们谈到文化合作的事情，他说，乔其亚几乎从来不曾看到中国的学术著作，他希望以后经常地寄去. 同时，他们也一定源源地寄东西到中国来.

因为库先生是教育部长，我就询问他乔其亚一般的教育状况，他告诉我，全共和国有21个中学，一个包罗各种系别的大学，八个师范学校，四千所小学，中学生有七万，师范学生有一万四千人，这些教育设施，仅仅为着三百万人口的一个乔其亚共和国.

他接着问我联大数学系有多少学生. 我告诉他共有30余人. 他大吃一惊，说："我们大学里，二千余学生中有600多个数学学生，为什么你们中国对数学这样不重视?"我反问他："你们这么多数学学生，将来毕业后，有些什么出路呢?"他回答得很妙，

说："头脑受过数学训练的人，你担心他们会没有出路吗?"

最后，我们谈到十三四世纪的乔其亚民族诗人罗斯泰凡里，《虎皮武士》的作者（中国有李霁野及侍桁、北芒两种译本），他说，罗斯泰凡里是乔其亚民族的代表诗人．他希望我能有机会一看《虎皮武士》在舞台上之演出．

下午参观博物馆，所参观的是"古代室"．馆中派有专人导游，室中每一物件，导游者都予以详细的解释．历三小时，只看了四个陈列室，卒以时间不早，中途辞出．

晚，米卡伐先生陪我去看戏，戏名《大卫皇的故事》．大卫在16岁时就开始了他的英雄事业，经过和国内外敌人的不断斗争，终于收复了第比利斯，这样，大卫就成为乔其亚人所崇拜的英雄．大卫皇是接近民众，保卫祖国的象征．这就是乔其亚所以崇拜他的理由．

散戏后，戏院的经理邀我去其办公室，并以茶点啤酒招待．演大卫皇及皇后泰玛娜的演员，也进来陪我聊天，拿了纪念册要我题词．他们招待我非常殷勤．临走时，我的大衣还是"大卫皇"给我穿上的哩！

4月7日

上午访慕黑他（Myxeta）古城．此城系建立于六七世纪，城中建筑都是乔其亚的古典型式，有几所教堂都是七八世纪的．这些教堂曾经被毁了几次，又经过几次修复的．

往返共经六小时．古城离第比利斯相当远，归途经过一丝厂，因此就和包罗宁先生谈起我国蚕丝的情形来，才知近年来苏联的蚕丝事业颇有发展．等我返莫斯科后，文协送了我一本苏联关于蚕丝方面试验的书．

晚看舞剧《天鹅湖》．久已闻名的舞剧，不料竟在第比利斯第一次上演时看到，眼福不浅．

4月8日

上午预备讲稿，下午去乔其亚科学院演讲，讲题为：《自守函数论》，极受欢迎．会后，和科学院的教授及研究员数十人谈

了许多事情，他们一致希望我国的数学杂志能迅速地经常寄去.

就在会中，得晤波兰名数学家伐尔费次（Walfisz），神交10年，此次幸在第比利斯握手，可谓快逾平生．伐氏在苏德战争前二年即至苏，否则恐怕他也免不了和前面所录的波兰诸数学家有同样的命运，遭受到希特勒的特务或集中营的迫害了．伐氏系战前波兰数论杂志的编辑，对我的工作，知之甚深．他说他拟写一本书，向我索取有关的材料，俾其书的内容更为充实，我答应了他的要求.

讲演完毕以后，科学院中的数学家都将他们著作的复印本送给我．共有五六十册之多．科学院送给我该院所出版的整套的杂志，这是异常名贵的.

7时才离开科学院.

晚，听音乐会.

4月9日

上午参观儿童之宫，全部是大理石的建筑，里面设有各部门：游息，学习各室．外面有修茂的林园，及儿童游玩的场所.

我在参观美术室和工艺室的时候，看见很多小孩子在模型上贴纸片．他们说．裱好后干了掉下来就成人像．儿童的年龄，大都是七八岁左右．工艺室中陈列满了女孩子们的刺绣和缝纫的工具及成绩.

在地理室中，有高低完全成比例的地形模型．矿藏图也是最有趣味的，电钮一开，产煤区都发红光．另一电钮一开，产油区就全发绿光．这对儿童们的记忆，是异常有助益的.

古代人如何生活，他们也有模型，活生生地表示原始人类的居住工作的情形．原始人类的用具，也都陈列在内．我想，用模型来说明古代史，这是最有效力的教学法，例如石器时代的人类如何用石头作工具，就有用石斧伐木的模型；例如要表示古代人的灶，就在地下掘了一个坑，中间安上一盏红灯来表示火升起来的情形．这种用模型的教学法，比中国用深奥的文字抽象地形容许多古代的事物，要具体生动得多了．就是讲授近代史时，也有

用许多表格和图画来说明的．其它如蚕的吐丝，蜂的酿蜜，和一切生物方面的各种模型，实在举不胜举．

使我最感兴趣的，还是数学室，它占有两间房子．我注意到其中的立体模型，如圆锥割面、正多面体等等．我看了之后，不禁想起了我国的整个数学系统中忽略了立体观念，举例说，立体几何及球面三角，似乎都不在我们的系统之内；更具体地说，我在大学四年级的班上，竟发现若干高材生不知道正多面体究竟有几种．这种缺乏立体概念的数学体系，使我莫测高深，难道我们所处的世界竟是扁平的吗？竟是二度空间吗？在宇宙观念进入四度论的今天，我们竟忽视三度空间的几何，实是大可骇怪的．又如圆锥曲线的名词早见于中学教科书上，但是我们的大学生还往往不知道圆锥曲线是从圆锥上截出来的曲线．这种忽视立体观念的数学，使我这个非中等数学教育家，发生了不少疑虑．

这些小天使由七岁到12岁就在这种生动的辅助教育的环境中熏陶着．

下午参观乔其亚大学，校长不在，由副校长领导参观各系．在生物系晤科学院研究员倍利塔西维利（Beritashvili），他特别为我做一实验，将一虾蟆从背上割开，用电通上它的神经，观察他的反应．倍氏为我费了不少事．实验之后，导我到杂志室，他取出一本几年前中国生理学会寄去的杂志，问我为什么以后一直都未寄去．他知道林可胜先生的名字，并称道他的工作．

此后，和副校长谈起罗斯泰凡里的《虎皮武士》．他说，这本书是反宗教的，所以不得发表的机会，但口口相传者800年，几乎家喻户诵，成为乔其亚人民生活的智慧的源泉．现在，译文遍世界，他问我中国有了译文没有．末后他送我两本书，一本是《虎皮武士》的乔其亚文精装本，精致漂亮，另一本是关于乔其亚的古迹古物的相片和说明，也美观可爱．

4月10日

上午参观植物园及西翁尼教堂（Cioni Church），系一古教堂．下午参观老城，是大卫皇时代被毁的遗迹；在老城附近，看

到不少土耳其人，衣着鲜艳.

晚，看舞剧.

4月11日

上午，参观斯大林在秘密工作时期所设立的秘密印刷所. 此印刷所现在照原样保存着，设有专人管理，离第比利斯约有三四十分钟的汽车行程. 参观后出来时，管理者送了我关于这个印刷所的照片一套，五张.

晚，看《虎皮武士》剧.

乔其亚教育部长库伯拉齐和乔其亚大学副校长都曾谈起过《虎皮武士》，现在，看到了舞台上的演出，全剧充满了对爱情与友谊的伟大的歌颂. 由虎皮武士泰里爱尔和阿乌唐第尔的真挚而笃实的友谊，体验出人民之间的友爱，也体验出各民族和各国之间的友爱. 男主人公与女主人公之间的爱情，真挚而伟大；为了爱，男主人公忍受了一切痛苦与磨折，终于完成了他们的理想.

不仅此，全剧还充满了乐观的反对侵略的爱国主义. 我想，《虎皮武士》所以口口相传800年，成为乔其亚人民生活态度的中心，不是没有原因的.

4月12日

下午1时，乔其亚科学院院长马斯海奇维里来访，他是刚从莫斯科赶来的. 同来者有新闻记者二人及乔其亚对外文化协会的人员五人.

马氏首先致歉意，说他因事羁迟在莫斯科，未能赶来参加我的讲演会. 末后，请我去其家吃晚饭. 其时，新闻记者插进来问我的生平，谈到文化合作. 我强调中苏文化的重要，大家同有此感.

在谈话的时候，包罗宁先生已请旅馆备了一些茶点招待这几个朋友，大家就一边吃一边谈起来. 马氏告诉我：乔其亚在革命前，没有科学院，在1935年方才设立的. 开始设立时，就先成立了数学研究所，其时只有10个成员，现在有35个成员及一个苏联科学院研究员，即马氏自己，出版有各种杂志. 我问他数学

研究所所注重的项目，下面是马氏告诉我的：微分方程、数论、弹性力学、函数论、形势几何、空气动力学及数值计算.

乔其亚对外文化协会会长米卡伐先生进来了，更多了一个谈话的参加者. 米氏表示：中国如果有什么文化协会，GOKS（乔其亚对外文化协会简称）很愿意和它取得联系，并希望中国现代的文学作品及文化史、绘画、瓷器及中国诗能寄去. 最后，他急于要知道中国有否《虎皮武士》的译本，他希望能寄了去（我已将李霁野先生的译本寄了去）.

晚八时，去马氏家吃饭，作陪者有科学院秘书加基齐先生、大学副校长及科学院学者多人，大都是数学家，因而谈起来颇能尽兴，只是使我的翻译员们相当困恼.

席间，喝了不少乔其亚名酒，几醉.

4月13日

晨，准备行装. GOKS送我酒一箱，各式烟20盒. 函GOKS米卡伐先生致谢，并重申中苏合作之忱.

行前，作一打油诗留别米卡伐先生云：

既承殷勤待，复约再见期，

中乔合作事，我辈当为之.

复成一诗，留别GOKS诸先生，云：

苏京仍飞雪，乔治盎然春，

今朝离别后，何日再逢君？

12时启程，送别诸先生. 盛意殷殷，殊为可感.

4月14日

下午3时，车抵巴库，经过高加索境，尽是平畴旷野，抵阿塞拜疆境，则见山岭起伏. 住巴库的旅馆中，窗子一开，油味冲鼻，可见油源之丰饶了.

在火车中，谈到有我国相似的船桥，是用船连接起来给人通行的，他们名之为舢板桥，音亦与我国语相同.

在旅馆中稍事休息后，AOKS（阿塞拜疆对外文化协会简称）副会长来访，约于当晚看歌剧.

晚赴歌剧院观剧.

4月15日

上午参观国家历史博物馆，馆长及导游者招待甚为周到. 我觉得阿塞拜疆的文化更接近东方，例如桥梁的式样，颇和我国古时桥梁相同，其图案也富于中国风味. 馆中陈列有新自土中发掘出来的几个瓦罐，据考证的结果，这瓦罐还是四千余年前的东西.

参观后，我觉得阿塞拜疆的文化和乔其亚的文化截然不同，乔其亚的博物馆中充满了宗教意识，而在这里的博物馆中，则毫无宗教色彩.

在馆内我还看见了一幅有趣的画，画一个阿塞拜疆著名皇子的恋爱故事，画中皇子睡在中间，他脑中在想着各个民族国家的女子，从穿着最多的中国女子到半裸的或全裸的西欧和印度女子，中国女子的位置列在第一，这或许也可以说明阿塞拜疆的文化和中国文化的接近处.

参观了三小时，即出馆游览市区，登一公园中之高山，纵观全城，一览无遗. 巴库位于里海之岸，城市即在山海之间建立起来的，所以街道是狭长的. 同游者文协副会长告诉我，巴库随地打下井去，就是油，真可谓油的世界了.

下午访科学院院长，院长系一外科专家，同时还会见了不少的科学家，除去谈数学的问题以外，他们特别提到中国的历史和地理的问题，有一位地理学家说，中国的铝占世界第一位，阿塞拜疆占第二位，所以此后中阿两国在这方面应当密切合作，他又说到我国有一叶先生（想指叶良辅先生），著有一篇关于浙江天目山的论文，他看到了非常有兴趣，他们也问到中国为什么在这几年内没有寄什么杂志到国外去.

我说到中国的历史家，在研究元代史的时候，常常到波斯的历史中去找材料；有位历史学家听了很有兴趣，他说，阿塞拜疆以前的历史，都不很可靠，目今正在从事科学的整理，他希望中国的历史学者如将中国历史中关于阿塞拜疆的材料寄去，欢迎之

至云.

辞出科学院时，已近6点钟了.

在科学院时，文协副会长和我说，6点将有车子来接我去文协，会长伏尔贡先生在那里等我. 届时去了文协，见门外有很多人，我还以为出了什么事哩？当即在客厅中吃茶点，过了十余分钟，主人引我至舞台的后台，出去一看，黑压压的约有三四千人之众，我心里有些慌，这究竟是怎么一回事呢？还不是如我起初想象的一个茶会呀！会长报告，一句也不懂，他报告完毕，台下掌声如雷，我的翻译包罗宁先生说，这是对我欢迎的表示，我赶紧站起来，报之以鞠躬，一方面心中有些着急，不要临时拉我演讲，我真不知道对这么多的群众，讲什么好呀！幸而，历久的掌声后，我不曾被邀讲演.

一刻，有人朗诵诗了，我这才知道是一个规模极大的诗歌朗诵会.

阿塞拜疆名诗人很多，此次参加者有八位诗人，如果说乔其亚是个数学家的国家，那末，阿塞拜疆可以说是诗人的国家了. 诗的内容，我一点不知道，但其朗诵的调子，却使我这个外行也觉悦耳动听. 朗诵者中有一个科学的诗人，他的诗是专门歌颂科学的，我想如果我懂得阿塞拜疆的文字，一定会听得怪有趣的. 科学诗歌化，这种特殊的作风，使我好象增长了不少见识呢！

散会后，我被邀到茶会的客厅里去，过了十余分钟，又被邀出去了. 原来是音乐会开始.

会中有16个女音乐家在奏形似琵琶的很小巧的乐器，音调和歌词都富有东方风味，昨晚歌剧的男主角，也在会中参加歌唱，主人们说，若干年前，阿塞拜疆的女子，是不准出来抛头露面的，现在才刚始解放出来. 所以这些女音乐家是颇为难得的.

散会后，已近11时，我即辞出，主人们说，你先回去，我们随后就来你的旅馆中，原来他们已经在我的旅馆中准备好了晚宴招待. 作陪者，有两个代理部长，三个诗人，两个科学家，一个历史家.

席间，主人们，特别是伏尔贡先生，坚决留我多住一天，几位数学家说，你决不能不在此作一演讲，明天，无论如何得演讲一次再走，盛情难却，只得答应，并于当夜请人去飞机场通知，后天才起飞.

伏尔贡先生起来说话了. 他说，阿塞拜疆除了出石油以外，丝和茶也出产很多，那是十二三世纪时由中国学去的，所以，他说，可见中阿两国关系之密切. 接着是代理外交部长的演讲和前面所说到的历史学者和地理学家的致词，他们又一次地强调中阿文化合作的重要. 当时，一位诗人冲动了，站起来朗诵了当场做成的一首诗，可惜不懂.

伏尔贡先生说，他的诗在中国有人译出来过，他收到了译文，他希望以后能源源地收到中国关于阿国文学作品的翻译.

散席时，已清晨 4 时了.

4 月 16 日

上午，起身很迟，在海边休息.

下午 3 时，在科学院演讲，科学院的数学家问我中国数学家和大学的情形，我将我国著名的数学家为之一一介绍，并简略报道我国各大学的现况.

6 时，报馆记者来访.

8 时，去戏院看爵士舞.

在戏院中，遇轻工业部长，年纪很轻. 我说，我所见到的阿塞拜疆各部长，年纪都很轻. 他说，各部长都是年轻的，少有 40 以外的人. 我想，阿国之所以年轻力强，富有朝气，这就是一个原因吧！

文协副会长向我说，他在 1945 年曾写了一篇文章，将中国战时的军事政治经济各方面，分析得很仔细. 他对我国的友情是极足珍贵的. 副会长是个新闻工作者，他在油区工作了有 10 年之久.

4 月 17 日

抵飞机场，知道斯大林格勒大风，气候不佳. 站长知道我急

于返莫斯科，临时他给我换了去罗斯托夫的飞机，由那里转莫京.

飞抵罗斯托夫，仍是大风，不能起飞. 同机者有由东北复员归国的红军，大家打开箱子，将所带的食物拿出来聚食，甚有趣.

在罗斯托夫住宿一宵.

4月18日

飞抵莫斯科15分钟，遇由巴库来的飞机，机内有傅秉常大使，自国内返任者，可谓巧遇.

4月19日

为乔其亚科学院写自型函数论文.

4月20日

上午续写论文.

下午参观农业科学院，携清华大学农业研究所之致敬函及论文，交该院秘书长，秘书长邀我去参观农场，大雨如注，未能如愿. 该院亦有许多材料，拟以后寄来中国.（一礼拜后，自列宁格勒回来时，知该院秘书长已逝世了!）

4月21日

下午，武官处的先生们来，询知无事，约同游夏宫，荒烟蔓草，宫殿的顶已崩坏了.

晚，胡世杰兄邀聚餐于大使馆. 傅大使拟宴请苏联科学家.

4月22日

去科学院访维诺格拉陀夫教授，并校译稿.

晚，看马戏团演技.

包罗宁先生告我，莫斯科大学鹊法累维奇教授说，莫京的代数学家希望我演讲一次我在群论方面的工作，我答应从列宁格勒回来后再讲.

4月23日

上午写文章摘要.

下午7时启程赴列宁格勒. 车名红箭快车. 自莫斯科至列宁

格勒间的铁道，曾被希特勒军队占领，破坏得很厉害，而现在，行车已恢复常态. 车行极速，想见苏联战后复员工作的积极迅速.

车上设备极佳，头等车位舒服之至.

沿路包罗宁先生指点给我看苏德战争的遗迹.

4月24日

上午11时抵列宁格勒.

下午，得悉此间科学院研究所所长马柯夫先生，曾经写信到莫斯科，请我来此. 四时，列匿克教授有电话来，问我明天有事否，他将来访. 我说明天上午九时，在旅馆中等他.

晚，去列宁格勒戏院看歌剧《茶花女》，演来感人甚深，妇女中有至泣下者.

4月25日

上午9时，列匿克教授来，长谈，极为愉快. 直至12时，他始抬起手腕来，一看表，匆匆地赴列宁格勒大学去上课.

由于战时交通的关系，我在国内很少收到国外的杂志，抵莫斯科后，才知道苏联又出现了一颗数学明星列匿克教授. 他告诉我几年中他的工作，我也告诉他我的工作情形. 虽然初会，倒像已认识很久的老朋友一样了.

列氏年纪30左右，去年曾获斯大林奖金，将来，维诺格拉陀夫的后继者，恐怕舍君莫属了.

列氏再四说，列宁格勒的教授都希望我多留几天.

下午4时去研究所讲演多复变数函数论，遇马柯夫先生. 马氏很年轻，专门研究形势几何学. 其父亦一数学名家，有名的"马柯夫链"，即为其重要的发明.

讲演后，研究所诸教授都要求我多留一天，再讲一次，盛意可感，决定于明天演讲矩阵几何及其应用的问题. 会后，讨论情形异常热列，直到6时许始散.

晚，赴列宁格勒戏院看《天鹅湖》舞剧.

在莫斯科时，朋友们都说，列宁格勒的《天鹅湖》舞剧最为

精美，机会好的话，可能会看到的．我以为只在此勾留两三天，机会不一定有，而居然躬逢其盛，可谓难得的机缘了．其布景之佳，舞蹈之美，只有用“观止矣”三字来形容了．

4月26日

上午周游市区．除包罗宁先生外，还有此间负责招待的波波夫女士．在涅瓦河旁，见到皇宫、学校，最值得看的是彼得大帝骑马的雕刻．马的前蹄跃起着，仅两只后蹄在地上，支持这雕刻极不容易．列宁格勒桥上也有四匹马的雕刻．在希特勒军队进攻时，此四匹马移去别处，在恢复原来的位置时，无线电不时广播着重新设置的情形．全列宁格勒的人民都关心着这四匹马的美术品的情况．

下午6时，在研究所演讲，讲毕，很多科学家都送给我他们自己著作的复印本，共约200册左右．

阿历山大洛夫教授对我说，我国有一位在美国研究的数学家，他研究所得的工作是阿氏从前发表论文的一部分，要我转告，并希望以后经常联系．

昨晚，晚餐时，在菜中发现一个苍蝇．我到底是中国人，习惯于中国生活了，就很平常地将苍蝇放在盘子的一边，我自己倒毫不介意的过去了．今晨包罗宁先生告诉我说，那个送晚餐来的女侍者被餐厅经理降调到餐厅里服务去了．原来昨晚这个女侍者就先向包罗宁先生说了，她非常抱歉，竟使餐中有了苍蝇．后来，她又自动地向餐厅经理报告了这件事，她因而受到这样的处罚．我听了，甚为不安．包罗宁先生问我，为什么不早点告诉他这件事情？我说，这件事情太平常了，所以也不曾重视．他说，是的，一个制度是否有缺点，全在于公众的检举，否则缺点将被保存而不能发现．后来，餐厅经理也来道歉，并告诉我他已将那个女侍者处罚了．我说，这实在不必．他回答我说，这是纪律．我再三请求他不必如此，他仍旧说这是纪律．

今日晚餐时，我和另外一个女侍者说到这件事，我说甚为抱歉．她说，这是她的责任，你何必抱歉呢？

我想到那个女待者的勇于认过的精神，餐厅经理的执法不阿的精神，另外那个女侍者的回答以及包罗宁先生的话，才发现一个国家的强大，不是没有原因的.

“是的，一个制度是否有缺点，全在于公众的检举，否则缺点将被保存而不能发现”，寥寥数语，给我多么深刻的印象和感想啊！

4 月 27 日

上午游彼得大帝宫及普希金公园. 事先，我得着两套关于皇宫和公园的照片，但以之与实景一对比，已景物全非了. 皇宫及公园遭德人破坏后颇为荒凉，惟其规模还可以想见的.

去皇宫和公园的路上，经过基洛夫工厂. 这厂是制造坦克的，战时，离前线不过五百码，但厂中工作一天都没有停止过，尽管工人们每天都因遭受到希特勒军队的炮火而有伤亡. 列宁格勒被围达 900 天，在围城中，士兵每日只得 350 公分的面包（约五六片）及一碗汤，人民每日只有 250 公分的面包，然而希特勒军队终于在这英勇坚强的名城前面崩溃了. 列宁格勒是世界上永远值得骄傲的地方.

一路上，颓垣败瓦，犹可想见被围时战争的壮烈.

下午 6 时赴车站，搭车返莫斯科，恰巧阿历山大洛夫教授在车站，送其夫人去休养所休假. 阿氏还再三特别说到我昨天的报告.

7 时，车开动了.

4 月 28 日

上午 11 时抵莫斯科. 列文生先生在车站接我.

下午访维诺格拉陀夫教授.

4 月 29 日

去斯泰克诺夫研究所借了几本书，送去一部分稿子.

4 月 30 日

庆永兄来访，并约我见英美记者，有一位美记者就是曾在中国的名记者爱金生先生.

晚看狄更斯的名剧.

5月1日

五一节. 这天天气很好，上午九点半列文生先生陪我去红场参加大检阅典礼，参加者每人都持有一张入场券，印得非常漂亮.

我住的旅馆，离红场相距仅咫尺. 各个主要街道都在忙着警戒，以备游行大队伍出发的时候，不致行进受到阻塞，所以我们绕道了好久才到达红场.

列宁墓上坐着几位苏联政府的首长，两旁则是各国外交使节及来宾席.

10点，检阅开始，总指挥宣布了开幕. 为首是各个军事单位的代表团，每个单位由200个代表组成行列，接着是摩托车队、炮队……炮身漆着白色物，我问上面是什么东西，原来这些都是战争中卓著勋劳的大炮，所以炮身上漆着奖章，说明它们在战争中击沉敌人多少只军舰，轰毁了多少座敌人的阵地……等等，甚至长长的炮身上，一列还不够，还添着两行. 高射炮身上也有这些奖章. 其后，便是坦克车队、反坦克炮队……等等. 苏联的坦克车，比之我以前在文化公园看见的德国50吨坦克车还要大，这是有名的85吨斯大林式的坦克，它们经过时，响声震耳欲聋. 这些部队还没有过完，天上的飞机列队来了，队形之整齐，令人吃惊. 一队队的机影，都由两行窗子中投射而过，其轨迹一点也不参差. 参观者，忘记了地上的巨大队伍在行进，一齐左顾右盼地瞪视着这一队队的巨鹰掠空而去.

检阅的行列过去之后，接着是各个机关团体的行列. 有一个工厂的大旗上，写着“本工厂完成新五年计划中本厂本月份工作百分之四十二”. 所有各机关的旗上，都标识着其自己机关的代表物，如工厂则绘着巨大的机器，比之我国的旗帜只是在横着一幅白布上写着机关或团体的名字，来得醒目. 所有这些队伍，到了列宁墓前，都一致向斯大林欢呼致敬. 直到这个时候，斯大林始终在检阅台上，没有离开过. 各个队伍中，还夹杂着工人们自

己组成的音乐队，兴奋、愉快，吹、奏、唱、打，完全表演出他们在热烈地庆祝着自己的节日.

当我见到这些机关团体的行列，我还以为也是来受检阅的.列文生先生告诉我，这是开始游行了.我问，游行到什么时候？他说，总要到六点钟的光景.他并且说，如果你觉得没有什么大兴趣的话，我们就回旅馆去休息一下，而且在旅馆的窗口中，也可见到这游行大队的.于是我们两个人绕了克里姆林宫一个大圈子，经一个多钟头，才到了旅馆.

我们二人在旅馆里谈了一个多钟头，谈到我这次参加五一节检阅的感想，谈到两国文化合作之重要，谈到我对于数学及其应用之观点.我说，有了数学这种分析的头脑，不但可以应用到自然科学上去，而且可以应用到其它各方面去.我记得在乔治亚时，科学院院长马斯海奇维里与我深有同感.

休息了一回，包罗宁先生来了.他没有穿着大衣.我问他，为什么不穿大衣？他说，他今天在游行行列中，大衣上给人家漆得五颜六色，不好穿了.我问他今天高兴吗？他说，太高兴了.

吃了晚饭，包罗宁先生和我去看焰火（致敬之意）.8点，各个方场拥着民众在跳舞.九点钟，开始了焰火，先是放上去一张一张的相片，斯大林的，红军将领的，继之是各色的焰火.最使我感觉兴趣的是探照灯，一下子，十几条光集中在一点，一下子又分散开去了.焰火过后，每条街上都挤着人民在狂舞.10点半，下起雨来，然而雨落不灭这几十万人民的热狂的火焰，冒着雨仍旧在疯狂地载歌载舞啊！

五一节，象征了苏联人民的快乐和幸福的生活，当我们想到苏联人民在经过三年的对德战争之后，又重新过着和平建设的日子，他们这种疯狂地庆祝着自己的节日，简直使我们苦难的中国人民无法想象.再过四个月，双十节又来了，那个时候，中国的人民是不是也能够如此兴高采烈地狂歌欢舞呢！遥听着祖国内战的炮声，像千百万根针刺击向心上来.啊，祖国！

5月2日

今天，苏联全国继续放假，街上的人拥挤不堪，有从遥远的乡间来的人民，更增加了莫斯科的热闹．晚上，雨比昨晚下得更大，所以在街上跳舞着的人们究竟比较少了些．

看罗马尼亚小提琴家爱尼斯柯（Einesko）的演奏．我后来才知道爱氏也是苏联对外文化协会的客人．在我旁边，同时有几位艺术学校的学生在给爱氏画像．

5月3日

去斯泰克诺夫研究所送书稿，遇见息垓教授．他告诉我，在莫斯科大学数学课程中，他曾讲授到我的关于“中值定理”的著作，他称赞我每用一个方法，总是用到极端精密的地步．

5月4日

上午去医学研究所注射防疫针，所中医生说我的腿可以医治得好．我问他需要几个月的时间，他说四个月．我又问他需要多少钱，他奇异地问：

“要钱么?”

我反问他一句：“不要钱吗?”

这一问一答，说明了两个不同社会中人们的观念是怎样的不同呀！

晚赴大使馆宴会．主人是傅大使，请的客人有维诺格拉陀夫教授、庞脱拉雅琴教授及其母亲、莫斯科大学数学系主任彼脱洛夫斯基及诸数学家，VOKS的凯缅诺夫、列文生、康脱洛索夫、包罗宁诸先生及几位艺术家，约30人左右．我知道庞脱拉雅琴教授的著作，大半是他母亲抄写的，我总以为庞教授的母亲一定也是个数学家，我就对她说：“你给你儿子不少的帮助，你对于数学也一定是很有研究的了.”她笑着说：“我之对于数学，就像我之对于中文一样.”

我和彼脱洛夫斯基谈起来了．他问我中国有多少所大学，我说大约有五六十所．他奇异地问：“你们没感到师资的缺乏吗?”我就反问他莫斯科大学数学系有多少教授，他说有一百余人，其中有52个是正教授．我说，如果像你们这样规模大的系，当然

我们中国要有师资缺乏之感了.

宴会到 12 点左右才散.

后来庆永兄告诉我，维诺格拉陀夫教授在席间和他谈到数学的重要，说：数学是科学之母，一个国家如果数学不发达，其它都谈不上了.

5 月 5 日—6 日

由于 4 日打的防疫针的反应，所以 5 日和 6 日，除去给乔治亚数学杂志写了一篇文章及 6 日上午去大使馆发一电之外，卧床两天.

5 月 7 日

下午去研究所，送一文给倍门脱教授.

晚看歌剧《卡尔孟》，系写一吉卜赛女子的故事.

5 月 8 日

去 VOKS 演讲. 这是一个理科小组的演讲，到有数学家、物理学家、天文学家等.

先是维诺格拉陀夫教授的介绍，他对我的工作备至推崇. 他将我的工作一段一段地介绍，说有几个工作已做到了尽善的地步. 末后，他说："华教授这次到苏联来，不仅我们对他个人的崇敬，而且可以使我们校正对一般中国的观点."

我讲的是中国数学史的情形，先介绍了中国古时数学的光荣，继分析其衰落的原因，再说到中国数学复兴的事实，向外国学习，最后说到中国科学的发达，必须要和科学先进诸国有密切的合作和互助.

会后，讨论很热烈，有问到我关于中国的数学家者，就我所知，一一介绍给他们了.

5 月 9 日

苏联对德作战的胜利节. 放假，莫斯科街上人很多. 因为雨，晚间街上歌舞的人较少. 又有焰火.

5 月 10 日

VOKS 在高加索饭店设宴欢送我，卡拉哥诺夫（Karagonoff）

先生主席致词：

“华教授，是从世界上一个最古老的国家来的．他是一位最年轻的对数学极有贡献的数学家．我们由此可以看到这个古老的国家，其前途充满着无限的朝气和光明．”

庞脱拉雅琴教授听到我很年轻，他就问我多少岁，我告诉了他．他说，正和他是同年．又问我是哪一个月生的，巧的是我们出生的月份也相同．

于是我立起来对这次VOKS的对我盛大招待致谢，说：

“维诺格拉陀夫教授是世界闻名的数学大师，这次能和他会见，非常荣幸．中国在抗战中，旧有外国科学方面的书志，受到我们的敌人日本帝国主义者之严重摧残；在抗战期中，又不曾能够顺利地收到国外新出的书志，所以中国的科学家在工作方面感到非常的不便利．倘使从这个国家能得到任何帮助，那末，在将来的中国科学史上一定有很大的影响的．”

于是维诺格拉陀夫教授致词，他强调着：

“华教授和他的朋友，只要有什么需要，我们都竭诚地愿意尽力．”

这时狄龙奈先生因为有事，退席先走，他也着重地重复维教授的话．

傅大使站起来，接着说出他的希望：中苏文化的密切合作．

以后是列文生先生致词，他说：

“华教授曾经和我说过，数学的头脑不但对自然科学极重要，就是对其它方面也是很有用处的．我异常服膺这句话，请大家为数学而干杯．”

这一个宴会，从12点开始，直到下午5点多才结束．临行时，卡拉奇诺夫先生说，我们还有一些小礼物送给华教授，他接着拿出一本巨厚的关于列宁格勒的书，一本精装的《普希金全集》，一个精致的红漆小盒．我感动地接受了这一份友情的礼物．

别时，因息垓教授既译我的著作，复将我之工作讲授于莫斯科大学，临别赋此以赠：

心印固已久，苏京喜逢君，
思慕日寒暑，謦欬一朝亲.
拙作蒙迻译，征引授诸生，
万里遇知己，快慰逾平生.
会晤何其难，离别何其频，
浮日过远山，何日再相亲？

同维诺格拉陀夫教授至其家．其后又应胡世杰先生宴．10时始回寓．

5月11日

晨2时由旅馆出发，3点50分乘机起飞．

别了，莫斯科！

下午3时，由巴库起飞．中途，觉得机身下降，我以为已达德黑兰，但时间未到，看下面，里海依然在望．一问，才知道因为风暴，又折回去了．

5月12日

晨7时，重由巴库起飞，9时抵德黑兰．隔了20余分钟，李大使铁铮的飞机也由国内抵达．

在德黑兰等了五天，本来计划是由德黑兰乘机飞巴格达，然后再换机飞巴士拉．因为李大使定16日（星期四）举行鸡尾酒会，将我介绍给伊朗的名流学者，所以只得改变原来计划，于17日乘火车出发，18日下午5时到阿克伐次，19日乘小汽车由阿克伐次出发，经过沙漠地带，历阿波唐、克尔曼沙阿而抵巴士拉．巴城几全淹水中，坐了小船进入市区．耽搁了二日，21日抵卡拉奇．22日抵加尔各答．24日购得飞机票，25日上午又回到了昆明．在整整的三个月中，完成了苏联之行．

附 录 XV

华罗庚的著作目录*

一、论文

[1] Sturm 氏定理之研究，科学，**14**（1929），545—548.

[2] 苏家驹之代数的五次方程式解法不能成立的理由，科学，**15**（1930），307—309.

[3] T^{-1} |H (x)| 函数之研究，科学 **15**（1931），871—888，1055—1062.

[4] 积分学上之一定理，科学，**15**（1931），1716—1719.

[5] 三角学上和角公式之推广与探讨，科学，**15**（1931），1930—1945.

[6] 一种新函数，科学，**15**（1931），2051—2058.

[7] On pseudo-periodic functions. *Trans. Sci. Soc. China* **8** (1934), 15—18; also *Tohoku Math J*. **40** (1934), 27—33.

[8] On the representation of integers by circulant. *Trans. Sci. Soc. China* **8** (1934), 19—21; also *Tohoku Math. J*. **39** (1934), 316—321.

[9] On a theorem of Hermite. *Trans. Sci. Soc. China* **8** (1934), 157—158.

[10] A note on Minkowski's theorem of homogeneous linear forms. *Trans. Sci. Soc. China* **8** (1934), 160—161.

[11] On the hypergeometric functions of higher order. *Tohoku Math. J*. **39** (1934), 253—263.

[12] Note on diophantine equation of two circulants. *Tohoku Math. J*. **40** (1934), 34—35.

[13] Note on Pell's equation. *Tohoku Math. J*. **40** (1934), 36.

[14] Waring's problem for cubes. *Bull. Calcutta Math. Soc*. **26** (1934), 139—140.

[15] On a certain kind of operations connected with linear algebra. *Tohoku Math. J*. **41** (1935), 222—246.

---

* 见 Loo-keng Hua, Selected papers, Springer 1980.

[16] A proof of Hadamard's theorem. *Tohoku Math. J.* **41** (1935), 247—248.

[17] The representation of integers as sums of the cubic function $(x^3+5x)/6$. *Tohoku Math. J.* **4** (1935), 356—360.

[18] On the representation of integers by the sums of seven cubic functions. *Tohoku Math. J.* **4** (1935), 361—366.

[19] The representation of integers as sums of cubic function $(x^3+2x)/3$. *Tohoku Math. J.* **41** (1935), 367—370.

[20] On an easier Waring-Kamke problem. *Sci. Repts. Tsing Hua Univ.* A3 (1935), 247—260.

[21] On Waring's theorems with cubic polynomial Summands. *Math. Ann.* **I** (1935), 622—628.

[22] On Waring's problem with polynomial summands. *Amer. J. Math.* **58** (1936), 553—562; also *J. Chinese Math. Soc.* **1** (1936), 23—61.

[23] Note on boundedly convergent power series. *Sci. Repts. Tsing Hua Univ.* **A3** (1936), 345—351.

[24] A problem on the additive theory of number of several variables. *Math. Zeit.* **41** (1936), 708—712.

[25] On Waring's problem. *Tohoku Math. J.* **42** (1936), 210—225.

[26] An easier Waring-Kamke problem. *J. London Math. Soc.* **I** (1936), 4—5.

[27] On Fourier transforms in L^p in the complex domain. *J. Math. Phys.* **15** (1936), 249—263. (with S. S. Shu)

[28] A problem in the additive theory of numbers of several variables. *J. London Math. Soc.* **12** (1937), 257—261.

[29] A generalization of an easier Waring-Kamke problem. *J. London Math. Soc.* **12** (1937), 262—264.

[30] On a generalized Waring problem. *Proc. London Math. Soc.* (2) **43** (1937), 161—182.

[31] On the representation of integers as the Sums of the k-th powers of primes. *Dokl. Akad. Nauk SSSR* (*N. S*) **17** (1937), 167—168.

[32] Some results in the additive prime-number theory, *Quart. J. Math.* Oxford Ser. **9** (1938), 68—80.

[33] Some results in the additive prime number theory. *Dokl. Akad. Nauk SSSR* (*N. S*) **18** (1938), 3.

[34] Some results in the additive theory of numbers. *Dokl. Akad. Nauk SSSR* (*N. S*) **18** (1938), 4.

[35] Some results in Waring's Problem for small powers. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*

(*N*. *S*) **18** (1938), 527—528.

[36] On Waring's problem. *Quart*. *J*. *Math*. Oxford Ser. **9** (1938), 199—202.

[37] On Tarry's problem. *Quart*. *J*. *Math*. Oxford Ser. **9** (1938), 315—320.

[38] On an exponential sum. *J*. *London Math*. *Soc*. **13** (1938), 54—61; also *J*. *Chinese Math*. *Soc*. **2** (1940), 301—312. (with further progress)

[39] On the representation of numbers as the sums of the powers of primes. *Math*. *Zeit*. **44** (1938), 335—346.

[40] A generalization of Lendesdorff's Theorem. *Proc*. *Indian Acad*. *Sci*. **7** (1938), 390—392.

[41] On Waring's problem for fifth powers. *Proc*. *London Math*. *Soc*. (**2**) **45** (1939), 144—160.

[42] A remark on the moment problem. *J*. *London Math*. *Soc*. **14** (1939), 84—86.

[43] On a lemma due to Vinogradow. *Dokl*. *Akad*. *Nauk SSSR* (*N*. *S*) **24** (1939), 419—420.

[44] On a system of diophantine equations. *Dold*. *Akad*. *Nauk SSSR* (*N*. *S*) **27** (1940), 312—313.

[45] On a generalized Waring problem, Ⅱ. *J*. *Chinese Math*. *Soc*. **2** (1940), 175—191.

[46] Some "Anzahl" theorems for groups of prime-power orders. *J*. *Chinese Math*. *Soc*. **2** (1940), 313—319. (with H. F. Tuan)

[47] On Waring's problem with cubic polynomial Summands. *J*. *Indian Math*. *Soc*. **4** (1940), 127—135; also *Sci*. *Repts*. *Tsing Hua Univ*. **A4** (1940), 55—83.

[48] On a theorem due to Vinogradow. *Quart*. J. *Math*. Oxford Ser. **11** (1940), 161—176.

[49] Sur une somme exponentielle. *C*. *R*. *Acad*. *Sci*. *Paris* **210** (1940), 520—523. On an exponential sum. *J*. *Chinese Math*. *Soc*. **2** (1940), 301—312.

[50] Sur le probleme de Waring relatif a un polynome du troisieme degre. *C*. *R*. *Acad*. *Sci*. *Paris* **210** (1940).

[51] On the number of solutions of certain congruences. *Sci*. *Repts*. *Tsing Hua Univ*. **A4** (1940), 113—133. (with S. H. Min)

[52] Determination of the groups of odd-prime-power order p^n which contains a cyclic subgroup of index p^2. *Sci*. *Repts*. *Tsing Hua Univ*. **A4** (1940), 145—154. (with H. F. Tuan)

[53] Some recent progress in theory of numbers. *Quart*. *Wu Han Univ*. **7** (1940). (with K. L. Chung) (in Chinese)

[54] A note on the class number of ternary quadratic forms. *J*. *London Math*. *Soc*. **16**

(1941), 82—83.

[55] On diophantine approximation. *Dokl. Akad. Nauk SSSR* (*N. S*) **32** (1941), 395—396.

[56] Some problems of the geometrical theory of numbers. *Sci. Record* **1** (1942), 19—21.

[57] On character sums. *Sci. Record* **1** (1942), 21—23.

[58] On a double exponential sum. *Sci. Record* 1 (1942), 23—25. (with S. H. Min)

[59] An analogue of Tarry's problem. *Sci. Record* **1** (1942), 26—29. (with S. H. Min)

[60] On the number of partitions of a number into unequal parts. *Trans. Amer. Math. Soc.* **51** (1942), 194—201.

[61] On the least primitive root of a prime. *Bull. Amer. Math. Soc.* **48** (1942), 726—730.

[62] On the least solution of Pell's equation. *Bull, Amer. Math. Soc.* **48** (1942), 731—735.

[63] The lattice-points in a circle. *Quart. J. Math.* Oxford Ser. **13** (1942), 18—29.

[64] On the distribution of quadratic non-residues and the Euclidean algorithm in real quadratic fields, I—II. *Trans. Amer. Math. Soc.* **56** (1944), 527—546, 547—569. (II, with S. H. Min)

[65] On the lack of an Euclidean algorithm in $R(\sqrt{61})$. *Amer. J. Math.* **67** (1945), 209—211. (with W. T. Shih).

[66] On the theory of automorphic functions of a matrix variable. I. Geometrical basis. II. The classification of hypercircles under the symplectic group. *Amer. J. Math.* **66** (1944), 470—488, 531—563.

[67] Geometries of matrices. I. Generalizations of von Staudt's Theorem. I_1. Arithmetical construction. *Trans. Amer. Math. Soc.* **57** (1945), 441—481, 482—490.

[68] A remark on a result due to Blichfeldt. *Bull. Amer. Math. Soc.* **51** (1945), 537—539.

[69] Geometries of matrices. *Sci. Record.* 1 (1945), 262—267.

[70] The theory of automorphic functions of a matrix variable. *Sci. Record.* 1 (1945), 303—305.

[71] On the Euclidean algorithm in the real quadratic fields. *Sci. Record* **1** (1945), 319. (with W. T. Shih)

[72] Geometries of symmetric matrices over the real field. I—II. *Dokl. Akad. Nauk SSSR* (*N. S*) **53** (1946), 95—97, 195—196.

[73] Automorphism of real symplectic group. *Dokl. Akad. Nauk* SSSR (*N. S*) **53** (1946), 303—306.

[74] On the theory of Fuchsian functions of several variables. *Ann. of Math.* **47** (1946), 167—191.

[75] On the extended space of several complex variables (I). The space of complex spheres *Quart. J. Math.* Oxford Ser. **17** (1916), 214—222; also *Sci. Record* **2** (1947), 6—8.

[76] Orthogonal classification of Hermitian matrices. *Trans. Amer. Math. Soc.* **59** (1946), 508—523.

[77] Geometries of matrices. II. Study of involutions in the geometry of symmetric matrices. *Trans. Amer. Math Soc.* **61** (1947), 193—228.

[78] Geometries of matrices. III. Fundamental Theorems in the geometries of symmetric matrices. *Trans. Amer. Math. Soc.* **61** (1947), 229—255.

[79] Theory of automorphic functions of several complex variables. *Akad. Nauk Gruzin SSR. Trudy Tbilis Mat. Inst. Razadze* **15** (1947), 143—273.

[80] Some results on additive theory of numbers. *Proc. Nat, Acad. Sci. U. S. A.* **33** (1947), 136—137.

[81] Some "Anzahl" theorems for groups of prime power orders. *Sci. Repts. Tsing Hua Univ.* **A4** (1947), 313—327.

[82] On a double exponential sum. *Sci. Repts. Tsing Hua Univ.* **A4** (1947), 484—518. (with S. H. Min)

[83] A theorem on matrices and its application to Grassmann space. *Sci. Repts. Tsing Hua Univ.* **A5** (1948), 150—181.

[84] Introduction to the theory of vector modular forms. *Akad. Nauk Azerbaidzan SSR. Trudy Inst. Fiz. Mat.* **3** (1948), 32—43. (in Russian)

[85] On the automorphisms of the symplectic group over any field. *Ann. of. Math.* **49** (1948), 739—759.

[86] On the existence of solutions of certain equations in a finite field. *Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A.* **34** (1948), 258—263. (with H. S. Vandiver)

[87] Characters over certain types of rings with applications to the theory of equations in a finite field. *Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A.* **35** (1949), 94—99. (with H. S. Vandiver)

[88] On the automorphisms of a field. *Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A.* **35** (1949), 386—389.

[89] On the number of solutions of some trinomial equations in a finite field. *Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A.* **35** (1949), 477—481. (with H. S. Vandiver)

[90] On the nature of the solutions of certain equations in a finite field. *Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A.* **35** (1949), 481—487 (with H. S. Vandiver).

[91] Some properties of a sfield. *Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A.* **35** (1949). 533—537.

[92] On the generators of symplectic modular group. *Trans. Amer. Math. Soc.* **65** (1949), 415—426. (with I. Reiner)

[93] Geometry of symmetric matrices over any field with characteristic other than two. *Ann. of Math.* **50** (1949), 8—31.

[94] Improvement of a result of Wright. *J. London Math. Soc.* **24** (1949), 157—159.

[95] An improvement of Vinogradov's mean-value theorem and several applications. *Quart. J. Math.* **20** (1949). 48—61.

[96] On the multiplicative group of a field. *Sci. Record* 3 (1950), 1—6.

[97] 环之准同构及对射影几何的应用，中国科学，**1** (1950)，1—6；即 успехи Матем. *Наук*, **8** (55) (1953), 143—148.

[98] Fundamental theorem of the projective geometry on a line and geometry of matrices. *C. R. Ier Cong. Math. Hongrois* (1950), 317—325. Akad. Kiado, Budapest. 1952.

[99] 广义域中方阵之一定理及其应用，数学学报，**1** (1951)，109—163.

[100] On exponential sums over an algebraic number field. *Canadian. J. Math.* **3** (1951), 44—51.

[101] Supplement to the paper of Dieudonne on the automorphisms of classical groups. *Memoirs Amer. Math. Soc.* **2** (1951), 96—122.

[102] Automorphisms of the unimodular group. *Trans. Amer. Math. Soc.* **71** (1951), 331—348. (with I. Reiner)

[103] 一个求极限的问题，中国科学，第 2 卷，1951 年，第 4 期，393—402.

[104] 等幂和问题解数的研究，数学学报，第 2 卷，1952/3 年，第 1/2 期，65—132.

[105] (与万哲先合作) 线性群的自同构与同构，数学学报，第 2 卷，1952/3 年，第 1/2 期，1—32.

[106] Automorphisms of the projective unimodular group. *Trans. Amer Math. Soc.* **72** (1952), 467—473. (with I. Reiner)

[107] A note on the total matrix ring over a non-commutative field. *Ann. Soc. Polon. Math.* **25** (1952). 188—198.

[108] 哈密尔顿型的推广，数学学报，3 (1953)，12—58.

[109] 中国数学现况介绍，科学通报，2 (1953)，1—5. also *Vestnik Akad. Nauk SSSR* 6 (1953)，14—20.

[110] Theory of functions of several complex variables. I. A complete orthonormal system in the hyperbolic space of matrices. *Acta Sci. Sinica* 4 (1953)，288—323. (in Chinese)

[111] On the theory of functions of several complex variables. I. A complete orthonormal system in the hyperbolic space of rectangular matrices. II. A complete orthonormal system in the hyperbolic space of hyperspheres. *Dokl. Akad. Nauk SSSR* (*N. S*) 93 (1953)，775—777，983—984. (in Russian)

[112] On the estimation of the unitary curvature of the space of several complex variables. *Sci. Sinica* 4 (1955)，1—26；即数学学报，4 (1951)，143—169.

[113] 常曲率的多复变数域，数学学报，4 (1954)，317—322.

[114] 多个复变数函数论 II，超球双曲空间中的一完整正交函数系，数学学报，5 (1955)，1—25. III，对称方阵及斜对称方阵双曲空间的一完整正交函数系，数学学报，5 (1955)，205—242.

[115] On the theory of functions of several complex variables. A complete orthonormal system in the hyperbolic space of symmetric and anti-symmetric matrices. *Dokl Akad. Nauk SSSR*, 101 (1955)，29—30.

[116] 一个关于行列式的不等式，数学学报，5 (1955)，463—470.

[117] Some algebraic identities. *Izv. Nat. Inst. Bulgarian Akad. Nauk* 2 (1956)，3—12.

[118] 几个定积分，数学学报，6 (1956)，302—312.

[119] 关于指数和，科学记录新辑，1 (1957)，15—16.

[120] 华林问题的优弧部分，科学记录新辑，1 (1957)，15—16.

[121] 一个偏微分方程组，科学记录新辑，1 (1957)，339—340.

[122] On the Riemannian curvature in the space of several complex variables. *Schr. Forschungs-inst. Math.* 1 (1957)，245—263.

[123] Geometry of rectangular matrices and their application to real projective and non-euclidean geometry. *Sci. Sinica* 6 (1957)，995—1011. (with B. A. Rosenfeld)

[124] On Cauchy formula for the space of skew-symmetric matrices of odd order. *Sci. Record* (*N. S*) 2 (1958)，19—22. (with K. H. Look)

[125] Boundary properties of the Poisson integral of Lie sphere. *Sci. Record* (*N. S*) 2 (1958)，77—80. (with K. H. Look)

[126] 紧致群上的连续函数所组成的空间中的一条收敛定理，科学记录新辑，2 (1958)，341—344.

[127] 正交群的一个正规子群，科学记录新辑，2（1958），383—384.
[128] 典型域上的调和函数论Ⅰ，矩阵双曲空间的调和函数，数学学报，8（1958），531—547.
Ⅱ，对称方阵双曲空间的调和函数，数学学报，9（1959），295—305.
Ⅲ，斜对称方阵双曲空间的调和函数，数学学报，9（1959），306—314，（与陆启铿合作）
[129] Theory of harmonic functions in classical domains. *Sci. Sinica* **8** (1959), 1031—1094. (with K. H. Look)
[130] Research works in mathematics in China from 1949—1959. By mathematics group with L. K. Hua and others. *Sci. Sinica* **8** (1959), 1218—1228; also: Mathematical research in Communist China in the past ten years. New York, U. S. A. *Joint Publications Research Service*, (1960), 91; also: A brief review of mathematical investigations in China for the last decade. *Uspehi Mat. Nauk* **15** (1960), no. 3 (93), 193—201.
[131] Remarks concerning numerical integration. *Sci. Record* (*N. S*) **4** (1960), 8—11. (with Wang Yuan)
[132]（与王元合作）关于在等高线图上计算矿藏储量与坡地面积的问题，数学学报，11（1961），29—40.
[133]（与他人合作）数学方法在麦收中的应用，数学学报，11（1961），63—75.
[134] 辛方阵的辛相似，中山大学学报（自然科学版），4（1962），1—12.
[135] 方阵的实相合，中山大学学报（自然科学版），4（1962），13—31.
[136]（与王元合作）有限与无穷，离散与连续，科学通报，1963年，第12期，4—21.
[137] 广义函数导引，数学进展，6（1963），391—409.
[138] On diophantine approximations and numerical integrations. (Ⅰ) (Ⅱ). *Sci. Sinica* **13** (1964), 1007—1010. (with Wang Yuan)
[139] Harmonic analysis on unitary group. *Peking sumposium Gen*. **165** (1964), 15—32.
[140] On an inequality of Opial. *Sci. Sinica* **14** (1965), 789—790.
[141] On an inequality of Harnack's type. *Sci. Sinica* **14** (1965), 791.
[142] On Lavrentiev's partial differential equation of the mixed type. *Sci. Sinica* **13** (1964), 1755—1762; 数学学报，15（1965），873—882.
[143]（与吴兹潜，林伟合作）二阶两个自变数两个未知函数的常系数线性偏微分方程组的标准型，科学通报（1964），1100—1103.
[144]（与吴兹潜，林伟合作）常系数二阶椭圆型偏微分方程组Dirichlet问题的唯一性定理，数学学报，15（1965），242—248.

[145] On the classification of the system of differential equations of the second order. *Sci. Sinica* **14** (1965), 461—465.

[146] 混合型偏微分方程开篇，中国科学技术大学学报，1 (1965)，1—27.

[147] On numerical integration of periodic functions of several variables. *Sci. Sinica* **14** (1965), 964—977. (with Wang Yuan)

[148] On uniform distribution and numerical analysis (Number-theoretic method). *Sci. Sinica* (Ⅰ) **16** (1973), 483—505; (Ⅱ) **17** (1974), 331—348; (Ⅲ) **18** (1975), 184—198. (with Wang Yuan)

[149] 多因素优选法，科学通报，(Ⅰ)(Ⅱ) **19** (1974)，73—75；(Ⅲ)(Ⅳ) **19** (1974)，317—319.

[150] A note on simultaneous diophantine approximations to algebraic integers *Sci. Sinica* **20** (1977) 563—567. (with Wang Yuan).

[151] 统筹方法概况报告 (1964)，建筑技术，1980 年第 2 期.

[152] 谈谈为国民经济服务的一些数学方法，讨论班讲义，1979 年.

[153]《优选与管理科学》发刊词，1984 年.

[154] 计划经济大范围最优化的数学理论

(Ⅰ) 量综与消耗系数方阵，科学通报，**29** (1984)，705—709.

(Ⅱ) 消耗系数，科学通报，**29** (1984)，769—772.

(Ⅲ) 正特征矢量法的数学证明，科学通报，**29** (1984)，769—772.

(Ⅳ) 数学模型（矛盾论的运用），科学通报，**29** (1984)，961—965.

(Ⅴ) 论调整，科学通报，**29** (1984)，961—965.

(Ⅵ) 生产能力的上限，表格. 科学通报，**29** (1984)，961—965.

(Ⅶ) 论价格，科学通报，**29** (1984)，1089—1092.

(Ⅷ) 论 Brouwer 不动点定理，科学通报，**29** (1984)，1281—1282.

(Ⅸ) 基本定理的证明，科学通报，**30** (1985)，1—2.

(Ⅹ) 生产系统的危机，科学通报，**30** (1985)，641—645.

二、著作

1. 堆垒素数论

(俄文版) 苏联斯捷克洛夫数学所，1947 年.

(中文修订版) 科学出版社，北京，1957 年.

(匈牙利文版) 匈牙利科学院，布达佩斯，1959 年.

(德文版) 民主德国，来比锡，1959 年.

(英文版) 美国数学会，1965 年.

2. 数论导引，科学出版社，北京，1957 年.

(英文版)，斯普林格出版社，1982 年.

3. 多复变数函数论中的典型域的分析，科学出版社，北京，1958 年（1965 年修订版）（俄文版）莫斯科，1959 年.

(英文版) 美国数学会，1963 年.

4. 指数和的估计及其在数论中的应用

(德文版) 来比锡，1959 年.

(中文版) 科学出版社，北京，1963 年.

(俄文版) 莫斯科，1964 年.

5. 数值积分及其应用（与王元合作），科学出版社，北京，1963 年.

6. 典型群（与万哲先合作），上海科技出版社，上海，1963 年.

7. 高等数学引论(第一卷，第一、二部分)，科学出版社，北京，1963 年.

(第二卷，第一部分) 1981 年，余篇 1984 年.

8. 从单位圆谈起，科学出版社，北京，1977 年.

(英文版) 斯普林格出版社，1981 年.

9. 数论在数值分析中的应用（与王元合作），科学出版社，北京，1978 年.

(英文版) 斯普林格出版社，1981 年.

10. 二阶两个自变数两个未知函数的常系数线性偏微分方程组（与林伟、吴兹潜合作），科学出版社，北京，1979 年.

11. 优选法，科学出版社，北京，1981 年.

12. 华罗庚论文选集，斯普林格出版社，1983 年.

13. 数学模型选谈（与王元合作），湖南教育出版社，1991.（英文版），布克豪斯出版社，1989.

三、科普

1. 从杨辉三角谈起，科学出版社，北京，1956 年.
2. 写给青年数学家，中国青年出版社，北京，1956 年.
3. 数学的性质和作用，科学出版社，北京，1959 年.
4. 从祖冲之的圆周率谈起，中国青年出版社，北京，1962 年.
5. 谈谈与蜂房结构有关的数学问题，北京出版社，1979 年.
6. 数学归纳法，上海教育出版社，上海，1963 年.
7. 从孙子的“神奇妙算”谈起，人民教育出版社，北京，1964 年.
8. 统筹方法平话及其补充，中国工业出版社，北京，1965 年.
9. 优选法平话及其补充，国防工业出版社，北京，1971 年.
10. 华罗庚科普著作选集，上海教育出版社，上海，1984 年.